

## 1 Om logaritmfunktionen log

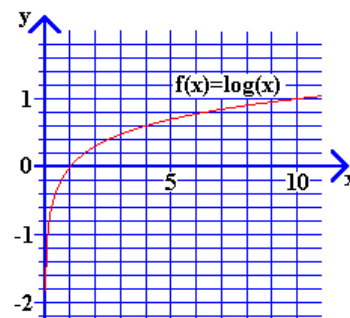
Vi starter med at undersøge logaritmfunktionen ved hjælp af lommeregnerens log-tast. Vi laver en tabel med sammenhørende værdier af  $x$  og  $\log(x)$

$x$	0.1	0.5	1	2	4	5	10	20	50	100
$\log(x)$	-1	-0.30103	0	0.30103		0.69897	1			2

og indtegner disse punkter i et koordinatsystem. Grafen ses på figuren til højre.

Det ser ud til, at vi kan beregne  $\log(x)$  så snart  $x$  er et positivt tal. lommeregneren giver fejl, hvis du forsøger at bruge negative tal som  $x$ -værdier.

Det vender vi tilbage til senere. Til den tid vil vi sige, at funktionen  $\log$  har *definitionsområdet*  $R_+$ , og vi vil skrive  $Dm(\log) = R_+$ . De værdier, som vi får beregnet med funktionen  $\log$ , kaldes på tilsvarende måde funktionens *værdimængde*, og vi skriver  $Vm(\log) = R$ .



## 2 Regneregler for logaritmer

Ud fra tabellen med sammenhørende værdier af  $x$  og  $\log(x)$  kan vi se, at der må gælde bestemte regneregler for logaritmfunktionen  $\log$ .

$x$	0.1	0.5	1	2	4	5	10	20	50	100
$\log(x)$	-1	-0.30103	0	0.30103		0.69897	1			2

Beregn fx  $\log(2) + \log(5)$ , og sammenlign med værdien af  $\log(10)$

$$\log(2) + \log(5) = 0.30103 + 0.69897 = 1.00000 = \log(10)$$

### Opgave 1

Beregn  $\log(3)$ ,  $\log(30)$  og  $\log(300)$ , og find ud af, hvilken sammenhæng der er. (Hemmeligt tip nederst på siden<sup>1</sup>)

$$\log(3) =$$

$$\log(30) =$$

$$\log(300) =$$

### Opgave 2

Gennemfør de følgende beregninger, og prøv at finde en sammenhæng med en anden  $\log$ -værdi.

a)  $\log(2) + \log(5) =$

b)  $\log(2) + \log(2) =$

c)  $\log(2) + \log(0.5) =$

d)  $\log(2) + \log(10) =$

e)  $\log(4) + \log(5) =$

f)  $\log(10) + \log(5) =$

g)  $\log(10) + \log(10) =$

h)  $\log(20) + \log(5) =$

Hvilken konklusion kan du drage? Kan det passe, at  $\log(50) = \log(5 \cdot 10) = \log(5) + \log(10)$  osv.?

<sup>1</sup> Kig også på værdien af  $\log(10)$

### Opgave 3

Gennemfør de følgende beregninger, og prøv at finde en sammenhæng med en anden log-værdi.

- |                            |                           |
|----------------------------|---------------------------|
| a) $\log(50) - \log(5) =$  | e) $\log(10) - \log(5) =$ |
| b) $\log(5) - \log(50) =$  | f) $\log(10) - \log(2) =$ |
| c) $\log(20) - \log(5) =$  | g) $\log(4) - \log(2) =$  |
| d) $\log(10) - \log(50) =$ | h) $\log(1) - \log(2) =$  |

Hvilken konklusion kan du drage? Kan det passe, at  $\log(10) = \log(50/5) = \log(50) - \log(5)$  osv.?

### Opgave 4

Gennemfør de følgende beregninger, og prøv at finde en sammenhæng med en anden log-værdi.

- |                          |                            |
|--------------------------|----------------------------|
| a) $\log(2) + \log(2) =$ | b) $\log(10) + \log(10) =$ |
|--------------------------|----------------------------|

Hvilken konklusion kan du drage? Kan det passe, at  $\log(4) = \log(2^2) = 2 \cdot \log(2)$  osv.?

### Sætning 1

Der gælder følgende regneregler for logaritmer

$$(L1) \log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

$$(L2) \log(a / b) = \log(a) - \log(b)$$

$$(L3) \log(a^n) = n \cdot \log(a)$$

### Opgave 5

Beregn følgende værdier ved brug af logaritmeværdierne i tabellen på side 1, og sammenlign så med, hvad en beregning på lommeregner giver:

- |   |                                    |
|---|------------------------------------|
| a) $\log(25) = \log(5 \cdot 5) =$           | d) $\log(0.05) = \log(1/20) = ?$   |
| b) $\log(1000) =$                           | e) $\log(0.01) = ?$                |
| c) $\log(80) = \log(5 \cdot 4 \cdot 4) = ?$ | f) $\log(0.125) = \log(0.5/4) = ?$ |

## 3 Om funktionerne $\log(x)$ og $10^x$

Ligesom vi kan se på logaritmfunktionen  $\log(x)$  kan vi også se på *potensfunktionen*  $10^x$ . Husk, at potensopløftning laves med lommeregnerens  $\boxed{\wedge}$ -tast.

### Opgave 6

Beregn

- |            |                   |
|------------|-------------------|
| a) $3^2 =$ | d) $10^2 =$       |
| b) $3^3 =$ | e) $10^{0.5} =$   |
| c) $3^4 =$ | f) $10^{1.234} =$ |

### Sætning 2

Når  $\log(x) = c$ , så er  $10^c = x$

Vi skal ikke bevise denne sætning, men vi kan undersøge, om taleksempler passer.

Vi har jo følgende tabel med sammenhørende værdier af  $x$  og  $\log(x)$

$x$	0.1	0.5	1	2	4	5	10	20	50	100
$\log(x)$	-1	-0.30103	0	0.30103		0.69897	1			2

Nu kan vi prøve at ”regne baglæns”, altså at gå fra  $y$ -værdierne (i værdimængden for  $\log$ ) til  $x$ -værdierne (i definitionsmængden for  $\log$ ). Vi beregner fx

$$10^{-0.30103} = 0.499999995 \sim 0.5$$

Når de beregnede værdier afrundes passende, kommer tabellen til at se således ud:

$x$	-1	-0.30103	0	0.30103	0.60206	0.69897	1	1.30103	1.69897	2
$10^x$	0.1	0.5	1	2	4	5	10	20	50	100

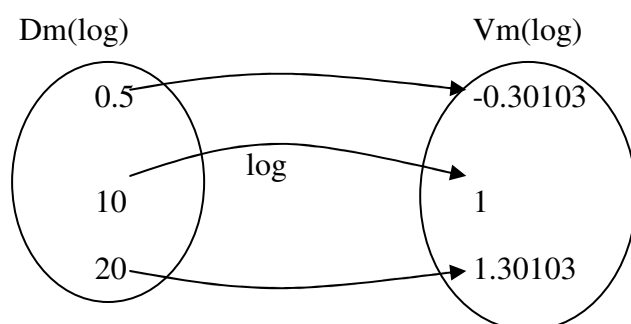
Hver eneste gang passer det:

$$\text{Når } \log(0.5) = -0.30103, \text{ så er } 10^{-0.30103} = 0.499999995 \sim 0.5, \text{ osv.}$$

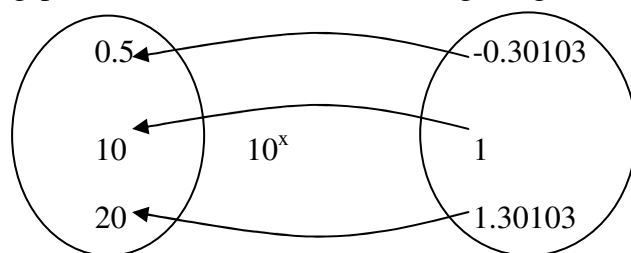
Denne særlige egenskab ved de to funktioner  $\log(x)$  og  $10^x$  skal vi se mere på senere.

#### 4 Om definitionsmængde og værdimængde

Vi kan tegne definitionsmængden og værdimængden for logaritmfunktionen på denne måde:



Med udgangspunkt i tabellen ovenfor kan vi også tegne således:



Her kan vi se, hvordan de to funktioner er ”hinandens modsatte” eller ”hinandens omvendte”, og vi kan se, at

$$\log(0.5) = -0.30103, \text{ og videre } 10^{-0.30103} = 0.5$$

I det sidste udtryk kan vi indsætte  $\log(0.5)$  i stedet for  $-0.30103$ , så får vi

$$10^{\log(0.5)} = 0.5$$

generelt gælder der:

#### Sætning 3

$$\log(10^x) = x$$

## 5 Om løsning af ligningen $10^x=c$

Nu skal vi prøve at løse ligninger af typen  $10^x=c$ . Vi starter med et eksempel.

### Eksempel

Løs ligningen  $10^x=3$

Det gør vi ved at "tage log på begge sider af lighedstegnet". Så får vi

$$10^x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \log(10^x) = \log(3)$$

Nu kan vi bruge sætning 3,  $\log(10^x) = x$ . Så får vi

$$\Leftrightarrow \quad x = \log(3) \sim 0.47712$$

Bagefter kan vi gøre prøve ved at beregne  $10^{\log(3)}$ . Lommeregnerens svar er  $10^{0.47712} = 2.999991333 \sim 3$ , så den fundne løsning  $x = \log(3) \sim 0.47712$  er altså korrekt.

### Opgave 7

Løs ligningen  $\log(x) = 2.4$

Vi følger eksemplet herover:  $\log(x) = 2.4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^{2.4} = 251.1886 \sim 251.19$

Vi kan gøre prøve ved at beregne  $\log(251.1886)$ . Lommeregnerens svar er  $2.399999925 \sim 2.40$ , så den fundne løsning  $x = 251.19$  er altså korrekt.

### Opgave 8

Løs selv følgende ligninger:

- |                     |                          |
|---------------------|--------------------------|
| a) $\log(x) = -1.7$ | d) $10^x = 0.13$         |
| b) $\log(x) = 5$    | e) $10^x = 4711$         |
| c) $\log(x) = 14$   | f) $10^x = 3 \cdot 10^6$ |