

Matematik A - Stx

Undervisningsvejledning

August 2006

Vejledningen indeholder uddybende og forklarende kommentarer til læreplanens enkelte punkter samt en række paradigmatiske eksempler på undervisningsforløb. Vejledningen er et af ministeriets bidrag til faglig og pædagogisk fornyelse. Det er derfor hensigten, at den ændres forholdsvis hyppigt i takt med den faglige og den pædagogiske udvikling. Eventuelle ændringer i vejledningen vil blive foretaget pr. 1. juli.

Citater fra læreplanen er anført i kursiv.

Denne 2. udgave indeholder især ændringer i afsnit 4 om evaluering.

Indholdsfortegnelse

0. Introduktion til vejledningen

1. Identitet og formål

2. Faglige mål og fagligt indhold

- a) Formler og ligninger
- b) Statistik og sandsynlighedsregning
- c) Funktioner og grafer, modellering af variabelsammenhænge
- d) Modellering med f og f'
- e) Integralregning og differentialligninger
- f) Geometri og vektorer
- g) Matematisk ræsonnement og teori
- h) Anvendelser af matematik – matematik i samspil med andre fag
- i) Anvendelse af it

3. Tilrettelæggelse

- a) Eksperimenterende tilgang
- b) Deduktive forløb
- c) Den mundtlige dimension
- d) Gruppearbejde
- e) Arbejdet med matematiske tekster
- f) Projektforløb og emneforløb
- g) Rapporter og skriftligt arbejde
- h) It
- i) Undervisningstilrettelæggelse med it
- j) Samspil med andre fag

4. Evaluering

- a) Løbende evaluering
- b) Den skriftlige prøve
- c) Formulering af opgaverne
- d) Eksamenssættets udformning
- e) Prøven uden hjælpemidler
- f) Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt
- g) Den mundtlige prøve
- h) Bedømmelseskriterier og karaktergivning

5. Paradigmatiske eksempler

1. **Eksempel 111** : Euklids elementer med elevvalgte projekter
2. **Eksempel 113**: Middelværdisætningen, konvekse funktioner og l'Hospitals regel
3. **Eksempel 114**: Deduktivt forløb om løsning af differentiallyigninger
4. **Eksempel 121** : Eksperimenterende forløb om differentialkvotienter
5. **Eksempel 123**: Eksperimenterende forløb om variabelbegrebet: Tilfældige rektangler
6. **Eksempel 141**: Differentiallyigningsmodeller
7. **Eksempel 142**: Funktioner af to variable
8. **Eksempel 161**: Eksempel på opskrift for læsning af en matematisk tekst
9. **Eksempel 162**: Engelsk tekst om Fermats sidste
10. **Eksempel 201**: Vækstmodeller og introduktion af variabelbegreb og variabelsammenhænge
11. **Eksempel 210**: Arvelighed, betingede sandsynligheder og Hardy-Weinbergs lov
12. **Eksempel 211**: Sandsynlighedsregning og retsgenetik
13. **Eksempel 220**: Statistik og vælgeradfærd
14. **Eksempel 221**: Stikprøver og databaser et forløb indenfor emnet statistik
15. **Eksempel 223**: Makroøkonomiske modeller og vismandsspillet
16. **Eksempel 230**: Radioaktivt henfald
17. **Eksempel 231**: Frit fald og udspring med faldskærm
18. **Eksempel 233**: Kinematik – projekter om emner fra det naturvidenskabelige gennembrud
19. **Eksempel 250**: Fourieranalyse og lyd
20. **Eksempel 260**: Jordskælv
21. **Eksempel 270**: Rum og dimension – om Abbott Abbotts Flatland
22. **Eksempel 273**: Risikovurdering – med eksempler fra store katastrofer som Three Miles Island og Challenger
23. **Eksempel 280**: Sammenligning af to måleserier
24. **Eksempel 294**: Matematiske modeller og SD-diagrammer
25. **Eksempel 304**: Hvornår er det sandt - Arven fra Euklid
26. **Eksempel 305**: Centralperspektiv og værdiperspektiv
27. **Eksempel 400**: Liste over gennemførte forløb. A-niveau. Skabelon
28. **Eksempel 410**: Eksempel på eksamensspørgsmål til mundtlig eksamen

0. Introduktion til vejledningen

På [fagets side på emu'en](#) er der placeret en række yderligere forløb og materialer til inspiration. Læseren opfordres ligeledes til at konsultere vejledningerne til de øvrige niveauer.

1. Identitet og formål

Læreplanens afsnit om identitet: *”Matematik bygger på abstraktion og logisk tænkning og omfatter en lang række metoder til modellering og problembehandling. Matematik er uundværlig i mange erhverv, i naturvidenskab og teknologi, i medicin og økologi, i økonomi og samfundsvidenskab, og som grundlag for politisk beslutningstagen. Matematik er samtidig væsentlig i dagligdagen. Den udbredte anvendelse af matematik bunder i fagets abstrakte natur og afspejler den erfaring, at mange vidt forskellige fænomener opfører sig ensartet. Når hypoteser og teorier formuleres i matematikkens sprog, vindes der ofte herved ny indsigt. Matematik har ledsaget kulturens udvikling fra de tidligste civilisationer og menneskenes første overvejelser om tal og form. Videnskabsfaget matematik har udviklet sig i en stadig vekselvirkning mellem anvendelser og opbygning af teori.”*

Læreplanens afsnit om formål: *”Gennem undervisningen skal eleverne opnå kendskab til vigtige sider af matematikkens vekselvirkning med kultur, videnskab og teknologi. Endvidere skal de opnå indsigt i, hvorledes matematik kan bidrage til at forstå, formulere og behandle problemer inden for forskellige fagområder, såvel som indsigt i matematisk ræsonnement. Herved skal eleverne blive i stand til bedre at kunne forholde sig til andres brug af matematik samt opnå tilstrækkelige kompetencer til at kunne gennemføre en videregående uddannelse, hvori matematik indgår.”*

2. Faglige mål og fagligt indhold

I læreplanens afsnit 2.1 er formuleret de faglige mål, som eleverne skal opnå i undervisningen i matematik A-niveau. De faglige mål er grundlaget for både skriftlig og mundtlig eksamen.

De faglige mål udmøntes gennem undervisningen dels i kernestof, der er beskrevet i afsnit 2.2, og dels i supplerende stof, der er beskrevet i afsnit 2.3. I undervisningen vil disse to kategorier af fagligt stof ofte være vævet sammen. I læreplanens omtale af det supplerende stof hedder det: *”Eleverne vil ikke kunne opfylde de faglige mål alene ved hjælp af kernestoffet. Det supplerende stof i faget matematik, herunder samspillet med andre fag, skal perspektivere og uddybe kernestoffet, udvide den faglige horisont og give plads til lokale ønsker og hensyn på den enkelte skole.”* Endvidere: *”for at eleverne kan leve op til alle de faglige mål, skal det supplerende stof, der udfylder ca. 1/3 af undervisningen, bl.a. omfatte”* en række nærmere specificerede kategorier af emner.

I det følgende er de tre dele af hovedafsnit 2 skrevet sammen.

2.a Formler og ligninger

Ifølge læreplanen skal eleverne kunne *”håndtere formler, herunder oversætte mellem symbolholdigt sprog og naturligt sprog og selvstændigt kunne anvende symbolholdigt sprog til at beskrive variablsammenhænge og til at løse problemer med matematisk indhold”*.

Håndtering af variabelsammenhænge introduceres bedst gennem eksemplarisk materiale (se [Eksempel 201](#)), der leder frem til fortrolighed med matematisk notation, definitioner og begreber. Således er verbale og symbolske repræsentationer i spil fra første færd.

I arbejdet med formler, ligninger og symbolholdige udtryk vælges et eksempel materiale, så eleverne får indtryk af matematikkens mange anvendelser i andre fag, samt af matematikkens beskrivelseskraft i håndtering af sammenhænge mellem variable, der er knyttet til virkelige fænomener. Inddragelse af matematik-historiske perspektiver på matematikkens anvendelse af symbolholdigt sprog kan give eleverne indsigt i, hvorledes matematikkens symbolholdige sprog er trådt ind på scenen som et værktøj, der kan sammenfatte antagelser og viden fra matematik selv eller fra andre fag i kompakt form. ”Når hypoteser og teorier formuleres i matematikkens sprog, vindes der ofte herved ny indsigt”, hedder det i læreplanens afsnit 1. Dette kan eksempelvis ske ved at lade eleverne møde eller direkte arbejde med klip fra ældre matematiske tekster. En selvstændig anvendelse af symbolholdigt sprog indebærer bl.a., at eleverne selv kan indføre passende betegnelser for konstanter og variable størrelser, og at de er i stand til selv at opstille formler (se [Eksempel 123](#)) på grundlag af en sproglig fremstilling af de sammenhænge, der forbinder de forskellige størrelser. Endvidere at de med ord kan forklare, hvad en formel udtrykker, at de kan lave nye formler ud fra eksisterende, og at de kan sætte tal korrekt ind i formler.

Ifølge læreplanen omfatter kernestoffet: ”*formeludtryk til beskrivelse af ligefrem og omvendt proportionalitet samt polynomielle sammenhænge, eksponentielle sammenhænge og potenssammenhænge mellem variable*”.

Det forventes således, at eleverne kan håndtere problemstillinger som:

- Body-mass-index, BMI for en person beregnes ved at tage personens vægt (målt i kg) og dividere med kvadratet på højden (målt i meter). Indfør passende variable og opstil en formel for BMI.
- En træklods skal være 4 gange så lang som bred. Klodsens rumfang skal være 200 cm^3 . Indfør passende betegnelser og opskriv en formel for klodsens overfladeareal.
- Massetiltrækningen mellem to legemer er omvendt proportional med kvadratet på afstanden mellem dem og ligefrem proportional med hvert af de to legemers masser. Indfør passende betegnelser og opstil en formel for massetiltrækningen.
- Af en kugle med radius 10 udskæres en cylinder. På figuren ses et snit gennem cylinderens akse, og dette er indlagt i et koordinatsystem. Gør rede for at cylinderens rumfang er givet ved...
- Givet et datamateriale for nogle sammenhørende værdier af strømstyrken I og spændingsforskellen U i en bestemt situation. Det oplyses, at U og I er proportionale. Opstil en formel, der viser sammenhængen. Givet en værdi af U , bestem en tilhørende værdi af I og omvendt.
- Givet et datamateriale for nogle sammenhørende værdier af den frekvens f og den bølgelængde λ , som nogle radiostationer arbejder med. Det oplyses, at f og λ er omvendt proportionale. Opstil en formel, der viser sammenhængen. Givet en værdi af f , bestem en tilhørende værdi af λ og omvendt.
- En pakke har form som en cylinder. Cylinderens rumfang er $V = \pi \cdot r^2 \cdot l$, hvor r er cylinderens endefladeradius, og l er længden af cylinderen. På grund af krav fra postvæsenet skal der gælde, at summen af længden og omkredsen af cylinderen skal være 250 cm. Opstil en formel der udtrykker dette. Udtryk dernæst rumfanget V som funktion af r .
- Fire variable størrelser er forbundet ved formlerne: $P = U \cdot I$ og $U = R \cdot I$. Opstil en formel, der udtrykker R ved P og U .

- Når spinat blancheres, ændrer vitaminindholdet, y , sig (målt i bestemte enheder) efter følgende forskrift: $y = 31,5 \cdot 0,887^t$, hvor t er tiden. Bestem y for given værdi af t og omvendt. Nitratindholdet i spinat ændrer sig samtidig og følger forskriften: $z = 20,3 + 61,4 \cdot 0,884^t$, hvor t er tiden. Bestem nitratindholdet for given værdi af vitaminindholdet.
- Isolér Q i formlen: $y^2 = Q \cdot x - Q \cdot a + k$
- Isolér n i formlen $A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$
- To elektriske modstande R_1 og R_2 indgår på en sådan måde i et elektrisk kredsløb, at den samlede modstand R kan udtrykkes ved formlen: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. I en bestemt situation er $R = 4$ og $R_1 = 6$. Bestem R_2 . Hvis R_1 holdes konstant på 6, hvad sker der så med R , hvis vi lader modstanden R_2 blive meget stor? Hvad sker der med R , hvis vi lader modstanden R_2 blive forsvindende lille?
- 6 forskellige størrelser er forbundet med formlen: $\ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right) = \frac{E}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$. Bestem værdien af den ukendte størrelse, når talværdierne for 5 af størrelserne opgives.
- Det radioaktive stof strontium 90 henfalder med 2,45% pr år. Et laboratorium indkøber 7 g af stoffet i 2004. Indfør passende betegnelser, og opskriv et matematisk udtryk, der beskriver, hvor mange gram radioaktivt stof, der vil være tilbage om et givet antal år.
- I en model for sammenhængen mellem passagertal og billettakst regner et busselskab med, at hver gang billettaksten stiger med 20% vil det medføre et fald i passagertal på 10%. Indfør passende betegnelser, og opskriv et matematisk udtryk for antallet af passagerer som funktion af billettaksten.
- Hastigheden hvormed Jordens befolkning vokser er ikke konstant, men ændrer sig med det samlede befolkningstal på en sådan måde, at forholdet mellem væksthastigheden og det samlede befolkningstal aftager lineært med tiden. Indfør passende variable og opstil en differentiaalligning, der udtrykker dette.
- Undersøgelser af udviklingen i mængden af kuldioxid i atmosfæren har ført til følgende matematiske beskrivelse: $\frac{dQ}{dt} = -3 + 5 \cdot 1,02^t$, hvor t er tiden målt i år siden 1984 og Q er mængden af CO_2 i atmosfæren. Forklar med ord, hvad ligningen udtrykker.

Ifølge læreplanen omfatter kernestoffet: ”regningsarternes hierarki, det udvidede potensbegreb, rationale og irrationale tal, ligningsløsning med analytiske og grafiske metoder og med brug af it-værktøjer”.

- Arbejdet med regningsarternes hierarki og brøkregning, med parentesregler, kvadratsætninger og algebraiske omformninger tilrettelægges, så det understøtter arbejdet med den matematiske teori, med matematisering og opgaveløsning og med håndtering af formler i andre faglige sammenhænge. Symbolbehandlende programmer inddrages i arbejdet med mere komplicerede udtryk.
- Ved arbejdet med formeludtryk fra andre fags problemstillinger kan eleverne møde eksponentiel notation og har således behov for at kunne reducere og at kunne håndtere potensudtryk.

- Ved udvidelsen af potensbegrebet, diskussion af rodbegrebet eller ved særskilte forløb over egenskaberne ved tal som π og e præsenteres irrationale tal på en måde som klargør forskellen mellem rationale og irrationale tal, samt at rationale tal kan repræsenteres både som brøk og som decimaltal.
- Ligningsløsning med analytiske metoder omfatter brug af nulreglen, løsning af første og andengradsligninger, af to lineære ligninger med to ubekendte samt simple ligninger med de elementære funktioner. Der forudsættes en viden om sammenhængen mellem grad af polynomier og antallet af rødder, samt om faktorisering af 2. gradspolynomier. Således forventes det, at eleverne kan opskrive samtlige 2. gradspolynomier, med to givne rødder.
- En række matematiske problemer fører frem til opstilling af mere komplicerede ligninger, eksempelvis hvor der både indgår polynomielle og transcendent udtryk. Sådanne problemer håndteres med matematiske værktøjsprogrammer. Når problemerne hidrører fra matematiske modeller, vil det ofte af konteksten eller af en faglig indsigt fra pågældende område fremgå, om der må forventes én eller flere løsninger til ligningen. Ved skriftlig eksamen vil regneforskrifter og ligninger i nøgne matematikopgaver ikke være mere komplicerede, end at symbolhåndterende programmer ved korrekt anvendelse kan give den fuldstændige løsning til den pågældende ligning eller give den fuldstændige løsning på spørgsmål om rødder og nulpunkter.
- Det forventes, at eleverne kan håndtere spørgsmål som:
 - for hvilke tal c har ligningen $f(x) = c$ netop én løsning
 - angiv for enhver værdi af konstanten a antallet af løsninger til ligningen ..., hvor konstanten kan indgå forskellige steder i et funktionsudtryk, fx ligningen $x^2+ax+2 = 0$.

Løsning af abstrakte uligheder indgår ikke som selvstændigt emne. Derimod vil eleverne i anvendelsesopgaver kunne møde problemstillinger som: ”for hvilke værdier af x er ... større end / mindre end en given værdi.”

I arbejdet med både komplicerede og mere simple ligninger er grafiske illustrationer vigtige til at skabe overblik og bedre forståelse af problemstillingen. De kan i visse tilfælde være en hjælp til at løse problemet og i alle tilfælde til kontrol med løsningen.

2.b Statistik og sandsynlighedsregning

Ifølge læreplanen skal eleverne kunne: ”*anvende simple statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller til beskrivelse af et givet datamateriale eller fænomener fra andre fagområder, kunne stille spørgsmål ud fra modeller, have blik for hvilke svar, der kan forventes, samt være i stand til at formulere konklusioner i et klart sprog*”.

Statistik er videnskaben om indsamling, håndtering og fortolkning af data fra omverden. Selv på et elementært niveau skal statistik ofte forholde sig til ubearbejdede data, og det ligger i fagområdets natur, at statistiske konklusioner ikke kan opnås og præsenteres med samme grad af sikkerhed, som man ellers er vant til i den øvrige del af matematikundervisningen. Dette skal præge undervisningen, så eleverne får et tydeligt indtryk af statistikens særlige karakter.

Overalt præsenteres vi for oplysninger og påstande, der baserer sig på forskellige mængder og typer af data. Det kan være formuleringer som: ”Aspirin forebygger hjerteproblemer, viser en ny undersøgelse...”, eller: ”Et rundspørge, som Tv-Avisen har foretaget viser, at 2 ud af 3 danskere mener...”. Eksemplarisk materiale af denne type kan være et godt udgangspunkt for en indledende

undervisning, for en diskussion af statistikkens metoder samt af spørgsmål som: Hvor sikre er de konklusioner, vi præsenteres for? Undervisningen skal overordnet set medvirke til, at eleverne bedre bliver i stand til at forholde sig kritisk til en formidling af et givet statistisk materiale, samt at de kan stille spørgsmål til kvaliteten af og håndteringen af statistiske undersøgelser.

Ifølge læreplanen omfatter kernestoffet: ”*simple statistiske metoder til håndtering af et datamateriale, grafisk præsentation af et statistisk materiale, empiriske statistiske deskriptorer, stikprøvers repræsentativitet*”.

Statistik arbejder med metoder til at håndtere usikkerhed. Men de spørgsmål, man søger svar på, må ikke være præget af uklarhed. Tværtimod er det afgørende, at man så præcist som muligt har gjort sig klart, hvad det er, man vil måle, hvad man gerne vil vide og hvilke antagelser, man i øvrigt gør sig, før arbejdet starter.

Det første skridt ind i statistikken vil normalt være en overvejelse om, hvad troværdige data er: Hvorledes vælger man stikprøver af en population (se [Eksempel 220](#)) således, at stikprøven kan siges at være repræsentativ.

Hvordan designer man metoder til at skaffe data, således at man med statistiske metoder kan give troværdige svar på givne spørgsmål?

Gennem undervisningen skal eleverne have mødt så mange eksempler på stikprøve-situationer – herunder stikprøver præget af forskellige former for systematiske fejl (bias), stikprøver, hvor der er skjulte variable på spil (konfundering), og stikprøver, hvor forskellige typer blindtest anvendes – at de kan håndtere problemstillinger som:

- I nyhedsudsendelsen på en lokal tv-station fortælles: ”Inden for de sidste timer har en af vore journalister gået rundt i Kolding og spurgt 55 tilfældige forbipasserende om holdningen til en aktuel og meget provokerende kunstudstilling. 35 af de adspurgte ønskede udstillingen lukket. Der er således et massivt pres på byrådet om at gribe ind. Nu afventer vi borgmesterens reaktion.”
 - Hvad er populationen og hvad er stikprøven?
 - Kommenter undersøgelsen og tv-kanalens præsentation af denne.
- Et sundhedsmagasin ønsker at undersøge, om store doser vitamintilskud forbedrer sundhedstilstanden. Bladet anmoder de af læserne, som gennem længere tid har taget store doser vitamintilskud, om at skrive ind og fortælle om positive og negative erfaringer med dette. 2754 læsere skriver ind. 93 % fortæller, at de kan spore en vis forbedring af helbredet.
 - Hvad er population, og hvad er stikprøve?
 - Kommenter undersøgelsens metode, og skriv et lille indlæg herom til en avis.
- En bestemt sygdom påvirker de røde blodlegemer og forårsager stor smerte. Et medicinsk præparat til behandling af sygdommen er udviklet, og kvaliteten af præparatet ønskes afprøvet på en population på 300 patienter, der har haft særligt mange smerteanfald.
 - Forklar, hvorfor det ville være en dårlig strategi at lade alle 300 få den nye medicin.
 - Beskriv et forsøg, der kunne give information om pågældende præparats virkning over for smerteanfald.

På [fagets side på emu'en](#) er der placeret en række yderligere opgaver om stikprøver.

Eleverne forventes at kunne anvende simple statistiske deskriptorer og simple grafiske præsentationer i en beskrivelse af et datamateriale. Det drejer sig om middeltal, median og kvartilsæt, om box-plot's og histogrammer, der kan optræde i problemstillinger som:

- For en bestemt gruppe på 15 læger blev det undersøgt, hvor ofte de havde udført et kirurgisk indgreb, der medførte fjernelse af livmoderen. Antallet af operative indgreb var for hver af de 15 læger henholdsvis: 50 33 25 86 25 85 31 37 44 20 36 59 34 28 49
En gruppe på 10 kvindelige læger blev tilsvarende undersøgt, og blandt disse blev der udført indgreb følgende antal gange: 7 14 25 5 33 29 18 31 10 20
 - Lav i samme koordinatsystem boxplot af hver af de to datasæt.
 - Kommenter undersøgelsen ved hjælp af den grafiske præsentation og størrelserne middeltal, median samt kvartilerne for de to datasæt.
- Givet et histogram over matematiklæreres aldersfordeling. Karakteriser dettes form. Ligger medianen til venstre for, til højre for, eller er den lig med middeltallet? Begrund svaret.
- Givet en computerudskrift af et statistisk materiale og beregninger af: maksimum, minimum, øvre og nedre kvartil, median, middelværdi og eventuelle andre karakteristiske størrelser for datasæt for forskellige sammenlignelige produkter, fx madtyper og kalorieindhold. Der ønskes en sammenligning i form af opstilling af boxplots for produkterne i samme koordinatsystem. Der ønskes en kommentar til den grafiske præsentation.

Histogrammer i eksamensopgaver er baseret på lige brede intervaller, mens de til grund liggende intervaller for sumkurver godt kan have forskellig bredde. Opgaven kan i øvrigt dreje sig om at anvende en grafisk repræsentation af et talmateriale til at svare på forskellige spørgsmål, herunder at aflæse og kommentere kvartilsæt. Da kvartilsæt ikke er entydigt defineret, kan forskellige it-redskaber give lidt forskellige svar, hvilket anses for uproblematisk. Sådanne opgavetyper vil ikke indgå i prøven uden hjælpemidler.

De faglige mål vedrørende statistik og sandsynlighedsregning vil hovedsageligt blive udmøntet gennem det supplerende stof. Ifølge læreplanen skal dette omfatte ”*anvendelse af mindst to typer statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller, indsamling og bearbejdning af data til belysning af en opstillet hypotese*”.

Den sandsynlighedsteoretiske formalisme med udfaldsrum og sandsynlighedsfunktion er ikke en del af det fælles kernestof. Men det enkelte hold kan vælge at gennemføre forløb over elementer af klassisk sandsynlighedsteori og kombinatorik, og så evt. bygge binomialmodeller, urnemodeller, betingede sandsynligheder eller andet ovenpå. Sandsynlighedsbegrebet kan imidlertid også introduceres gennem frekventielle sandsynligheder (i diskrete tilfælde) knyttet til statistiske undersøgelser.

Det formelle begreb ”stokastisk variabel” indgår heller ikke i det fælles kernestof. Men i bestemte forløb kan det være en fordel at introducere stokastisk variabel som et begreb og en notation, der gør det mere enkelt at formulere spørgsmål og opstille formler.

Et datamateriale kan tilvejebringes på mange måder:

- eleverne kan selv via spørgeskemaer, test i idræt eller på anden vis generere det datamateriale, holdet vil underkaste en statistisk analyse
- datamaterialet kan også komme via et samarbejde med andre fag (fx naturvidenskabeligt grundforløb, eksperimentelle fag eller samfundsfag)
- man kan også vælge at trække på det omfattende materiale af autentiske data, som findes i en række databanker på nettet. Med moderne it-værktøjer kan sådanne data umiddelbart trækkes ind og gøres til genstand for statistisk behandling.

En statistisk undersøgelse af et materiale har normalt flere trin, hvoraf første trin er af mere deskriptiv karakter. Denne fase giver samtidig bedre muligheder for at kunne stille præcise spørgsmål til det givne materiale. I statistiske undersøgelser formuleres sådanne spørgsmål ofte som hypoteser. Belysning af en opstillet hypotese kan gennemføres på mange måder. Man kan vælge en eksperimentel tilgang med anvendelse af statistiske it-værktøjer. Men et hold kan naturligvis også vælge at fordybe sig i elementer af klassisk hypotesetest. Mange af de forløb, man kunne vælge at gennemføre, har et teoretisk fundament, der går betydeligt ud over det gymnasiale niveau. Det er ikke tanken, at man i sådanne forløb skal søge at nå til bunds i en forståelse af den fordeling, man arbejder med, eller eksempelvis af det formelle grundlag for hypotesetest. I de fleste tilfælde vil det være mere hensigtsmæssig at inddrage eksperimentelle metoder og præsentere det matematiske begrebsapparat, så det spiller sammen med intuitionen.

Statistik og sandsynlighedsregning har så mange berøringsflader med omverdenen og med andre fag, at der er et stort og varieret antal emner inden for dette område, som kan være genstand for et samarbejde med andre fag, eller som kan dyrkes på rent matematikfagligt grundlag:

- Et forløb om opinionsmålinger (se [Eksempel 220](#)) kan både tilrettelægges i grundforløbet og i en studieretning i et samarbejde med samfundsfag. Datamaterialet kan indsamles i spørgeskemaer eller hentes fra databaser eller opinionsmålingsinstitutter. Gennem forskellige former for simuleringer kan der arbejdes med test af hypoteser og med graden af sikkerhed, hvormed resultater præsenteres. Både randomfunktioner i lommeregner og regneark og mere avancerede it-værktøjer kan anvendes.
- Datamateriale fra større spørgeskemaundersøgelser (se [Eksempel 221](#)) kan give grundlag for, at eleverne selv opstiller hypoteser om sammenhænge, og om hvorvidt forskellige dataserier udtrykker reelle forskelle mellem køn, aldersgrupper, meningsgrupper osv. eller er udtryk for statistiske tilfældigheder. Et sådant forløb indebærer anvendelse af it-værktøjer.
- Måleserier genereret fra forsøg i eksperimentelle fag, eller målinger foretaget på eleverne i idræt eller biologi – (fx om følsomhed på ryg og hænder, om evnen til at smage forskel, om reaktionshastighed, træfsikkerhed osv.) – kan give anledning til en statistisk sammenligning af måleserier (se [Eksempel 280](#)) på grundlag af hypoteser, som eleverne formulerer. Sammenligninger kan både ske ved eksperimenterende arbejdsformer på it-værktøjer eller i nogle andre sammenhænge ved et binomialtest, eller ved at introducere χ^2 -test.
- Et forløb om ventetider (fx i fysik om radioaktivt henfald) kan føre til en introduktion og anvendelse af Poisson-fordelingen og evt. et matematisk studium af sider ved denne.
- Et forløb med random-walk modeller kan give en eksperimenterende tilgang til at undersøge normalfordelinger. Man kan også vælge at anvende statistisk it-værktøj og her lade eleverne eksperimentere med en række forskellige datamaterialer på en sådan måde, at der via et stort antal simuleringer og beregninger af tilhørende middelværdier tilvejebringes et troværdigt indtryk af, hvorledes normalfordelingen optræder som grænsetilfælde.
- Et forløb om arvelighed (se [Eksempel 210](#)) kan tilrettelægges, så fokus er på simple betingede sandsynligheder og Hardy-Weinbergs lov. Men man kan også gennemføre et lidt længere forløb om retsgenetik og dna-profiler (se [Eksempel 211](#)), hvor der teoretisk bygges på Bayes' sætning, men samtidig udnyttes it-værktøjer til analyse af datamaterialet.
- Et forløb om Simpsons paradoks kan gennemføres alene i matematik eller sammen med andre fag, der også ønsker at sætte fokus på denne side af præsentationen af simple statistiske oplysninger. Forløbet kan allerede tilrettelægges i 1. g. og bygger hovedsageligt på vejret gennemsnit.

- Men kan også vælge på et hold at gennemføre forløb med en sandsynlighedsteoretisk undersøgelse af forskellige former for spil og lotto. Både binomialmodeller og urnemodeller kan komme i spil.
- Risikovurdering (se [Eksempel 273](#)) indgår på mange steder i et moderne samfund og kan både give materiale til forløb om forsikringsmatematik og forløb om vurdering af sikkerheden på avancerede virksomheder.

På [fagets side på emu'en](#) er der placeret en række yderligere forløb og materialer til inspiration.

2.c Funktioner og grafer, modellering af variabelsammenhænge

Ifølge læreplanen skal eleverne kunne ”*anvende funktionsudtryk og afledet funktion i opstilling af matematiske modeller på baggrund af datamateriale eller viden fra andre fagområder, kunne forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidde af modellerne, kunne analysere givne matematiske modeller og foretage simuleringer og fremskrivninger*”. Modellering med afledet funktion omtales i næste afsnit.

Kernestoffet omfatter ifølge læreplanen: ”*begrebet $f(x)$, karakteristiske egenskaber ved følgende elementære funktioner: lineære funktioner, polynomier, eksponential-, potens- og logaritmefunktioner, cosinus og sinus, karakteristiske egenskaber ved disse funktioners grafiske forløb, anvendelse af regression*”.

Arbejdet med sammenhænge mellem variable (se [Eksempel 201](#)) omfatter både matematiske metoder til behandling af et autentisk talmateriale og modeller, hvor variabelsammenhænge er fastlagt ved et formeludtryk, som det fx er situationen i optimeringsopgaver. Begge tilfælde giver naturlige oplæg til arbejdet med funktionsbegrebet. Håndtering af autentisk talmateriale vil naturligt inddrage it-hjælpedmidler. Hvis det er muligt, kan diskussioner om eventuelle årsagssammenhænge og anvendte idealiseringer ved modelopstillingen foregå i et samarbejde med andre fag.

De elementære funktioner, der er omtalt i læreplanens afsnit om kernestof, kan blive introduceret og studeret under arbejdet med modellering, matematisering og løsning af nye problemtyper. Eksempelvis kan tredjegradspolynomier blive præsenteret under arbejdet med optimeringsopgaver; eksponentielt voksende og aftagende funktioner kan blive præsenteret i sammenhæng med behandling af et datamateriale, der beskriver populationsvækst eller radioaktivt henfald; sin og cos som funktioner af reelle tal præsenteres i sammenhæng med behovet for at kunne modellere fænomener, der udviser periodisk svingning.

Men undervisningsforløb kan også tilrettelægges således, at man først introducerer og studerer elementære funktioners karakteristiske egenskaber og siden inddrager disse i en modelleringssammenhæng. Eksempelvis kan potensfunktioner introduceres i sammenhæng med en generalisering af potensbegrebet, og funktionsklassens karakteristiske egenskaber kan blive studeret i et rent matematisk forløb for siden at blive inddraget i modellering af biologiske og fysiske fænomener.

Studiet af de elementære funktioner vil ofte foregå i en vekselvirkning mellem rent matematiske aktiviteter og modelleringsopgaver. Eksempelvis kan logaritmefunktioner blive introduceret tidligt i forløbet, således at eleverne bliver fortrolige med funktionernes regnetekniske og skaleringssegenskaber og bliver i stand til at håndtere formler, hvor disse egenskaber anvendes som i pH-skalaen i kemi, i decibelskalaen i fysik, i formler for stjerners størrelsesklasser i astronomi eller

i Richterskalaen i naturgeografi. Senere i hele forløbet kan man vende tilbage og vælge at gennemføre et stringent deduktivt forløb over eksistensen af logaritmefunktioner med de ønskede egenskaber.

De elementære funktioners karakteristiske egenskaber beskrives med begreber som definitionsmængde, monotoniforhold, lokale og globale ekstrema og asymptoter. Hvor der indgår konstanter i en regneforskrift, studeres disses betydning for det grafiske forløb. Til de karakteristiske egenskaber hører yderligere:

- sammenhængen mellem grad og antal nulpunkter for polynomier
- sammenhængen mellem diskriminant, toppunktets beliggenhed og antal nulpunkter for 2. gradspolynomier
- begreberne fremskrivningsfaktor og vækstrate, fordoblings- og halveringskonstant, og sammenhængen mellem a^x og e^{kx} for eksponentielle udtryk
- regneregler for logaritmefunktioner
- sammenhængen mellem %-vækst for afhængig og uafhængig variabel for potensfunktioner
- periodicitet for sinus og cosinus.

Logaritmiske koordinatsystemer er ikke et selvstændigt emne, men eleverne skal kunne aflæse i logaritmiske koordinatsystemer, da de i mange sammenhænge og i andre fag vil kunne møde sådanne.

Ifølge læreplanen omfatter kernestoffet endvidere ”*principielle egenskaber ved matematiske modeller, modellering*”. Funktionsudtryk anvendes både til modellering af geometriske fænomener, statistiske sammenhænge og variabelsammenhænge. I enhver modellering indgår principielle overvejelser om idealiseringer mv. Dette er omtalt under afsnittet om anvendelser af matematik.

Modeller til beskrivelse af et talmateriale inviterer til spørgsmål om prognoser, til spørgsmål som: hvad sker der med y-værdierne, når x-værdierne bliver meget store?, eller til spørgsmål, der vedrører fortolkning af de formeludtryk og regneforskrifter, som modellerne genererer. Der kan ligeledes være tale om spørgsmål vedrørende beregninger af ukendte størrelser ud fra visse givne talværdier.

Det forventes således, at eleverne kan håndtere problemstillinger som:

- Givet et datamateriale. Det oplyses, at talmaterialet kan beskrives ved en matematisk model af typen: $f(x) = ax + b$, $f(x) = b \cdot a^x$, $f(x) = b \cdot e^{kx}$ eller $f(x) = b \cdot x^a$.
Bestem a og b, henholdsvis k og b.
Hvornår vil befolkningstallet / koncentrationen / strålingen overstige / komme ned under en given værdi? (Den uafhængige variable behøver naturligvis ikke være tiden)
Samt yderligere spørgsmål til modellen ud fra de karakteristiske egenskaber ved pågældende funktionsudtryk.
- I en matematisk model for befolkningstallets udvikling i New York (målt i tusinder) i årene 1790 – 1900 beskrives dette ved følgende udtryk: $f(t) = 36.3 \cdot 1.044^t$, hvor t angiver antal år efter 1790.
Hvad angiver tallet 36,3?
Hvor stor var den årlige %-tilvækst i befolkningstallet ifølge modellen?
Indbyggertallet udviklede sig faktisk i årene 1790 – 2000 efter følgende opgivne datamateriale. Kommenter modellen ud fra disse oplysninger.

- Grafen for 2. gradspolynomier kan anvendes til modellering af visse linjer i bygningskonstruktioner. En bestemt tunnel har et parabelformet tværsnit med opgivne mål. Indlæg et passende koordinatsystem, og undersøg, hvilke dimensioner lastvogne maksimalt må have for at kunne køre igennem.

2.d Modellering med f og f'

En række modeller udspringer af rent matematiske analyser af et problem – som det ofte er tilfældet med optimeringsopgaver – eller af fysiske, kemiske, biologiske og andre love og sammenhænge. I opstillingen af sådanne modeller eller i besvarelsen af de tilhørende spørgsmål inddrages ofte infinitesimalregning. Håndtering af disse problemstillinger forudsætter derfor, at eleverne er fortrolige med de emner, som kernestoffet ifølge læreplanen omfatter: ”*definition og fortolkning af differentialkvotient, herunder væksthastighed og marginalbetragtninger, afledet funktion for de elementære funktioner samt regnereglerne for differentiation af $f + g$, $f - g$, $k \cdot f$, $f \cdot g$ og $f \circ g$, udledning af udvalgte differentialkvotienter*”. Kernestoffet inden for dette område omfatter endvidere: ”*monotoniforhold, ekstrema og optimering samt sammenhængen mellem disse begreber og differentialkvotient*”.

Det forventes således, at eleverne kan håndtere problemstillinger som:

- En kasse uden låg skal konstrueres, så den er 1,6 gange så lang som bred og har et rumfang på 150 dm^3 .
 - Indfør passende betegnelser og opstil et matematisk udtryk for overfladearealet som funktion af kassens bredde.
 - Bestem dimensionen, så kassens overfladeareal bliver mindst muligt.
- Et bestemt metal nedbrydes under påvirkning af atmosfærisk luft. Undersøgelser har vist, at tykkelsen af korrosionslaget (målt i mm) kan beskrives ved en funktion af tiden givet ved regneforskriften: $f(t) = \dots$, hvor t angiver....
 - Bestem $f'(t)$
 - Giv en fortolkning af tallet $f'(10)$.
- I en bestemt koncentration udvikler bromkoncentrationen sig som en funktion af tiden (målt i sekunder) givet ved forskriften: $f(t) = 3,00(1 - e^{-0,0166t})$.
 - Vokser eller aftager koncentrationen af brom under reaktionen?
 - Bestem den hastighed hvormed koncentrationen ændrer sig til tiden $t = 100$.
 - I regneforskriften indgår tallet 3,00. Hvad angiver dette tal?
- Indlandsisens alder, målt i år er givet ved en funktion af dybden af isen. Et bestemt sted er denne funktion givet ved regneforskriften: $f(t) = 109400 - 13660 \cdot \ln(3005 - x)$.
 - Kommenter modellen gyldighedsområde.
 - I hvilken dybde findes is, der blev dannet for 8000 år siden?
 - Bestem $f'(1250)$, og gør rede for betydningen af dette tal.
- Et bestemt sted kan vanddybdens variation som en funktion af tiden t beskrives ved udtrykket: $f(t) = 7 + 5 \sin(0,5t - 1)$.
 - Bestem største og mindste vanddybde ifølge modellen.
 - Bestem $f'(t)$ og bestem den hastighed hvormed vanddybden ændrer sig til tidspunktet $t = 12$.
- Når der sker en pludselig tilførsel af spildevand til et vandløb, vil dette forårsage et iltunderskud i vandløbet. Man har erfaringer med, at sådanne hændelser kan modelleres med

funktioner af typen $f(t) = k \cdot t \cdot e^{-at}$, hvor k og a er positive konstanter og $f(t)$ angiver iltunderskuddet (målt i mg / liter) til tiden t efter udslippet fandt sted. Giv en beskrivelse ledsaget af en grafskitse af et muligt forløb for udviklingen af denne forurening.

- I en reaktor produceres et radioaktivt stof i en proces, hvor der dannes 54 g af stoffet i timen. Stoffet omdannes ved radioaktivt henfald på en sådan måde, at der forsvinder 12% af stoffet pr time. Indfør passende betegnelser, og opskriv en ligning, der beskriver situationen.

I mange anvendelsesopgaver vil den matematiske modellering resultere i udtryk, som rækker ud over de typer af regneforskrifter, der er behandlet i undervisningens gennemgang af de elementære funktioner og regnereglerne for differentiation. I sådanne tilfælde forventes det ifølge læreplanen, at eleverne kan: ”*anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer*”. Det kan være opgaver som:

- Bestem den fart v (målt i km / t), der tillader flest biler pr minut at passere en bro, når antallet N af biler, som en funktion af v er givet ved:
$$N(v) = \frac{12v}{0,008v^2 + 0,2v + 4}$$
- En pige befinder sig i vandet ved position A, se figuren. Hun svømmer med farten 0,4 m/s og skal frem til position B på land. Hun går med farten 1,4 m/s. Gør rede for at tidsforbruget ved at følge den rute, der er angivet på figuren kan beskrives ved: $f(x) = \dots$ Bestem den rute der ville give pige det mindste tidsforbrug.

Eleverne forventes at opnå en sådan fortrolighed med differentiation af de elementære funktioner og med regnereglerne for differentiation, så de ved prøven uden hjælpemidler kan håndtere simple opgaver inden for disse emner. Det drejer sig både om at bestemme afledet funktion og tangentligning samt at kende sammenhængen mellem f' , monotoniforhold og lokale ekstrema.

I undervisningen kan marginalbetragtninger og begrebet væksthastighed introduceres på mange måder. Det kan fx ske i forbindelse med modelleringsopgaver. Men man kan også vælge at tilrettelægge undervisningen, så man først opnår fortrolighed med differentialregningens teori og håndværk, for siden at fordybe sig i anvendelserne. Ofte vil det ske i en vekselvirkning, hvor man undervejs fordyber sig i, hvorledes man i økonomi, fysik eller andre naturvidenskabelige fag ræsonnerer ved hjælp af infinitesimale betragtninger og dermed søger at forstå og beskrive sammenhænge i både statiske og dynamiske systemer. På [fagets side på emu'en](#) er der placeret en række yderligere materialer til inspiration.

Arbejdet med begrebet differentialkvotient indebærer, at grænseværdibegrebet inddrages, men det er ikke tanken, at dette gives en selvstændig behandling. Tilsvarende indebærer studiet af sammenhængen mellem f' og begreber som monotoniforhold og lokale ekstrema inddragelse af kontinuitetsbegrebet, men det er ikke tanken, at dette gives en selvstændig behandling.

Arbejdet med at tilegne sig indsigt i differentialregningen vil på alle hold foregå i en stadig vekselvirkning mellem fordybelse i teorien og udvikling af de håndværksmæssige færdigheder i anvendelsen af differentialregningen. For til fulde at forstå begreber som væksthastighed og marginalbetragtninger må man jævnlige vende tilbage til det teoretiske grundlag.

Holdet vælger selv, hvilke af regnereglerne og hvilke af de elementære funktioners differentialkvotienter man vil give en grundig teoretisk behandling.

Ifølge læreplanens omtale af supplerende stof skal alle hold arbejde med: ”*ræsonnement og bevisførelse inden for infinitesimalregningen*”. Dette kan gribes an på mange måder. Det kan være større sammenhængende forløb eller flere mindre forløb, hvor man vælger at:

- fordybe sig i beviserne for maks-min-sætningen og for monotonisætningen
- studere betydningen af f'' (se [Eksempel 113](#))
- tage fat om kontinuitetsbegrebet og de reelle tals egenskaber
- udnytte den vundne indsigt i differentialregningen til at studere størrelsesforhold mellem funktioner
- studere elementer af l’Hospitals regler (se [Eksempel 113](#))
- studere differentiation af funktioner af to variable (se [Eksempel 142](#))
- studere approksimerende polynomier – med inddragelse af integralregning
- lægge hele holdets indsats på dette felt indenfor integralregningen og teorien for differentiaalligninger

På [fagets side på emu’en](#) er der placeret en række yderligere materialer til inspiration.

2.e Integralregning og differentiaalligninger

Ifølge læreplanen skal eleverne kunne ”*anvende forskellige fortolkninger af stamfunktion og forskellige metoder til løsning af differentiaalligninger*”.

Integralregning og differentiaalligninger bliver normalt genstand for behandling på et tidspunkt, hvor eleverne allerede har en vis erfaring med matematisk modellering og opbygning af matematisk teori. I gymnasiet er der ikke mulighed for at lade hele den matematiske analyse fremstå som én sammenhængende teoribygning, men ved at udnytte den matematiske modenhed, eleverne har på dette tidspunkt, kan dele af integralregningen og af teorien for opstilling af og løsning af differentiaalligninger gives en stringent behandling.

Har holdet tidligere arbejdet med infinitesimale betragtninger, kan dette inddrages i en diskussion af arealberegning af områder afgrænset af grafer for kontinuerte funktioner og således føre frem til indførelse af det bestemte integral $\int_a^b f(x)dx$. Eller det kan være problemstillinger fra andre fag, hvor grænseværdier af summer naturligt optræder, og således fører frem til præsentation af det bestemte integral. Der kan også tilrettelægges eksperimentelle og induktive forløb over problemfeltet arealbestemmelse, hvor eleverne føres frem til grænseværdibetragtninger for forskellige summer. Har holdet gennemført, eller planlægger holdet at gennemføre forløb over emner som geometriske fraktaler, kan der trækkes forbindelse mellem disse forløb.

Andre hold vil vælge at introducere integralregningen gennem en diskussion af stamfunktionsbegrebet. Man kan således vælge at udmønte læreplanens formulering fra det supplerende stof om ”*ræsonnement og bevisførelse inden for infinitesimalregningen*” ved at tilrettelægge et sammenhængende forløb om middelværdisætningen og monotonisætningen og anvendelser af disse til bestemmelse af mængden af stamfunktioner til en given kontinuert funktion. Senere kan man vende tilbage til problemstillingen under arbejdet med bestemmelse af den fuldstændige løsning til visse differentiaalligninger.

Uanset hvilken tilgang holdet vælger til behandling af integralregningen, så skal differential- og integralregningens hovedsætning om sammenhængen mellem areal og stamfunktion gives en grundig behandling.

Ifølge læreplanen omfatter kernestoffet: ”stamfunktion for de elementære funktioner, ubestemte og bestemte integraler, regneregler for integration af $f + g$, $f - g$ og $k \cdot f$ samt integration ved substitution, bevis for sammenhængen mellem areal- og stamfunktion, rumfang af omdrejningslegemer”. Eleverne forventes at opnå en sådan fortrolighed hermed, at de ved prøven uden hjælpemidler kan håndtere simple opgaver inden for disse emner. Det drejer sig både om at bestemme stamfunktioner, arealer og bestemte integraler og at kende sammenhængen mellem stamfunktion og areal, så de kan håndtere problemstillinger som:

- Givet en funktion, hvis graf sammen med 1. akse afgrænser flere indbyrdes adskilte punktmængder. Bestem visse integraler ud fra oplysninger om punktmængdernes areal. Bestem punktmængdernes areal ud fra oplysninger om forskrift eller om værdien af bestemte integraler.
- Givet en tabel med funktionsværdier for en funktion f og for en stamfunktion til f . Bestem et integral.

Det forventes i øvrigt, at eleverne kan håndtere problemstillinger som:

- Bestem til funktion f med forskriften: $f(x) = \frac{9}{3-4x}$, $x < \frac{3}{4}$, den stamfunktion, hvis graf går gennem $O(0,0)$. Bestem endvidere den stamfunktion, hvis graf har linjen med ligning: $y = x + 1,5$ som tangent
- Bestem $\int x^2 \sqrt{x^3 + 3} dx$
- Bestem $\int_0^1 \frac{x+4}{x^2+4x+5} dx$
- Graferne for $f(x) = \sin(x)$ og $g(x) = \sin(2x)$ afgrænser i området mellem $x = 0$ og $x = 2\pi$ to punktmængder A og B. Lav en skitse af situationen, og gør rede for, at det ene område er 9 gange så stort som det andet.
- I området mellem $x = 0$ og $x = a$, hvor $a > 0$, afgrænser grafen for funktionen f med forskriften $f(x) = e^x - e^{-x}$ sammen med førsteaksen et område, der har et areal. Bestem tallet a , så arealet bliver 8.
- Grafen for funktionen f med forskriften $f(x) = x^2 - 6x + 10$ afgrænser sammen med linjen $y = 2$ i første kvadrant et område M, der har et areal. Bestem arealet. Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen. Bestem tilsvarende rumfanget, hvis M drejes 360° om linjen med ligning $y = 2$.
- Formen af en skål med flad bund kan fremkomme ved at dreje grafen for funktionen med forskrift: $f(x) = x^{0,2} + a$, $x \in [0;1]$, $a > 0$, 360° om førsteaksen. Bestem a , så rumfanget bliver 4.
- En funktion er givet ved forskriften: $f(x) = 2x + e^{-x}$, $x \geq -2$. Grafen for f afgrænser sammen med linjerne med ligninger $y = 1$, $y = 2x$, og $x = k$, hvor k er et tal > 1 , en punktmængde der har et areal. Bestem $A(3)$. Bestem $A(k)$ udtrykt ved k .

Et gennemgående træk i behandlingen af differentiallygninger vil være opfattelsen af differentiallygninger som matematiske modeller. Ifølge omtalen af kernestoffet skal eleverne opnå indsigt i ”*principielle egenskaber ved matematiske modeller*”. Det fælles kernestof udgøres ifølge

læreplanen af ”lineære differentiallyigninger af 1. orden og logistiske differentiallyigninger, kvalitativ analyse af givne differentiallyigninger samt opstilling af simple differentiallyigninger”.

Det forventes således, at eleverne kan håndtere problemer som:

- En integralkurve til differentiallyigningen: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-1}$, $y > 1$ går gennem punktet $P(1,2)$.
Bestem en ligning for tangenten til denne kurve i punktet P .
- Om en løsning til differentiallyigningen: $\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$ oplyses, at grafen forløber i området $\mathbf{R} \times]1; \infty[$. Hvad kan siges om ekstrema og monotoniforhold?
- Et varmt metalstykke, der anbringes i koldere omgivelser, afkøles således, at den hastighed, hvormed temperaturen ændrer sig, er proportional med forskellen mellem metalstykkets temperatur og omgivelsernes temperatur. Indfør passende betegnelser, og opstil en differentiallyigning, der beskriver, hvordan metalstykkets temperatur ændrer sig under afkøling (+ evt. spørgsmål til modellen).
- Udledning af fosfor til en forurenset sø stoppes. Det antages at fosfor-koncentrationen herefter falder på en sådan måde, at hastigheden, hvormed koncentrationen ændres, er proportional med den tilbageværende koncentration af fosfor. Indfør passende betegnelser, og opstil en differentiallyigning, der beskriver, hvordan fosforkoncentrationen ændrer sig med tiden (+ evt. spørgsmål til modellen).
- Vand løber ud af en beholder gennem et hul i bunden. Den hastighed, hvormed vandhøjden i beholderen ændrer sig, er til ethvert tidspunkt proportional med kvadratroden af vandhøjden. Indfør passende betegnelser, og opstil en differentiallyigning, der beskriver situationen (+ evt. spørgsmål til modellen).
- I en model for verdens befolkningstal antages, at væksthastigheden ændrer sig med befolkningstallet på en sådan måde, at forholdet mellem væksthastighed og befolkningstallet aftager lineært med tiden. Indfør passende variable, og opstil en differentiallyigning, der beskriver befolkningstallets udvikling (+ evt. spørgsmål til modellen).
- I en model for rygtespredning blandt en bestemt gruppe personer, ønskes en beskrivelse af hvorledes antallet y af personer, der har hørt rygtet, udvikler sig med tiden. Det antages, at den hastighed, hvormed dette antal ændrer sig, er proportionalt med produktet af antallet, der kender rygtet, og det antal, der endnu ikke har hørt om rygtet. Opstil en differentiallyigning som y må opfylde.
- lufttrykket som en funktion f af højden x over havoverfladen opfylder ligningen: $f'(x) + af(x) = 0$, hvor tallet a er en konstant. Bestem en forskrift for f , når det oplyses, at lufttrykket ved havoverfladen er 1000, og at det halveres når højden øges med 5,54 km.
- I en bestemt proces fremstilles et radioaktivt stof på en sådan måde, at mængden $M(t)$ af stoffet til tiden t kan beskrives ved differentiallyigningen: $\frac{dM}{dt} = (1 - 0,29)M$. Det oplyses at $M(0) = 0$. Bestem en forskrift for $M(t)$, og forklar hvad der sker med værdien af M , når t -værdierne bliver meget store.
- En bestemt population udvikler sig således, at antallet af individer y som funktion af tiden x kan beskrives ved differentiallyigningen $\frac{dy}{dt} = ay(1000 - y)$. Til tiden 0 består populationen

- af 100 individer. På det tidspunkt hvor populationens størrelse er 300 er væksthastigheden 20. Bestem en forskrift.
- En befolknings størrelse kan beskrives ved en funktion N , således at $N(t)$ er befolkningstallet til tiden t . Det antages, at N opfylder differentialligningen: $N'(t) = (0,025 - 0,0004t)N$, samt $N(0) = 113 \cdot 10^6$
 - Bestem en forskrift for N og beregn $N(30)$.
 - Angiv monotoniforholdm og evt. lokale ekstrema for N .
 - Antag modellen holder over lange tidsrum. Giv en fortolkning af, hvorledes $N(T)$ udvikler sig.
 - Bestem den løsning til $y' + y = 2e^x$, hvis graf går gennem ...
 - Bestem den løsning til $y' - 2y = 4x^2 - 4x$, hvis graf tangerer x -aksen i et punkt med positiv førstekoordinat.
 - Bestem den løsning til $y' = -2xy + x$, hvor $f(1) = 2$
 - Bestem den løsning til differentialligningen $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$, hvis graf går gennem $P(1,2)$

Eleverne skal ifølge læreplanens omtale af supplerende stof arbejde med:

”differentialligningsmodeller, herunder opstilling, anvendelse og løsning af differentialligninger”.

Det kan foregå såvel ved anvendelse af infinitesimale betragtninger, anvendelse af grafiske metoder som ved opstilling af differentialligninger på basis af en sproglig formulering:

- Infinitesimale betragtninger kan være i spil ved modellering af fysiske fænomener, eksempelvis inden for den klassiske mekanik eller kinematik (se [Eksempel 233](#)). Men det kan også dreje sig om modellering af dynamiske systemer inden for biologi, kemi eller samfundsfag, hvor eksempelvis SD-diagrammer (se [Eksempel 294](#)) (SD = system dynamics) kan anvendes. I begge tilfælde bygges på en faglig viden fra andre sammenhænge, evt. direkte et samarbejde med andre fag.
- Grafiske metoder kan udvikles ud fra en intuitiv forståelse af Eulers metode til løsning af differentialligninger (se [Eksempel 141](#)) og kan inddrages i sådanne eksperimentelle forløb, hvor en måleserie for vækst, afkøling eller lignende søges modelleret.
- Opstilling af differentialligninger på basis af sproglige formuleringer bygger normalt på en faglig viden fra andre områder, som man må tage for givet i matematikundervisningen.

Holdet vælger selv, hvilke typer differentialligningsmodeller, man vil fordybe sig i, men hvor det er muligt tilrettelægges dette med fordel i et samarbejde med andre fag:

- Den lineære inhomogene førsteordens differentialligning kan anvendes til at modellere fænomener som dobbelt radioaktivt henfald eller forløb af epidemier, og studiet af denne type kan således naturligt foregå i et samarbejde med andre fag. Specialtilfælde af den lineære førsteordens differentialligning kan anvendes til at modellere fænomener som simple blandingsproblemer, forurening af en sø, nedbrydning af kolesterol, bestemmelse af fossile funds alder, afkøling af en jernklods mv.
- Modeller for vækst og udvikling fører ofte til opstilling af logistiske differentialligninger. Med et indgående kendskab til denne type er vejen ret kort til studiet af differentialligninger af typen $\frac{dy}{dt} = k(a - y)(b - y)$, der kan anvendes til modellering af blandingsproblemer inden for kemi herunder af irreversible andenordens reaktioner.

- Bernouillis differentiaalligning repræsenterer en anden måde at generalisere den logistiske differentiaalligning på. Samtidig kan den løses ved samme teknik, som eleverne måske er blevet fortrolige med under arbejdet med den logistiske. Bernouillis differentiaalligning kommer i spil i mange situationer, både i fysiske modeller og i opstilling af fiskerimodeller.
- Modellering af fænomener som svingninger i elektriske kredsløb, fjederbevægelser og andre dæmpede svingninger eller jordskælv (se [Eksempel 260](#)) giver alle anledning til at studere de homogene og inhomogene lineære andenordens differentiaalligninger. Det samme gør beskrivelsen af statiske systemer som kædelinjen.
- Modellering af fysiske fænomener som frit fald og udspring med faldskærm (se [Eksempel 231](#)), varmestrømning og tømning af en vandbeholder fører ofte til opstilling af differentiaalligninger, der principielt kan løses ved separation. Sådanne modeller kan derfor give anledning til fordybelse i teorien for og metoder til løsning af separable differentiaalligninger.
- Man kan også vælge at basere sit arbejde med opstilling, anvendelse og løsning af differentiaalligninger på udnyttelsen af matematiske værktøjsprogrammer, der både kan håndtere symbolsk og numerisk løsning. Dette giver muligheder for at eksperimentere med differentiaalligninger (se [Eksempel 141](#)), som vi ikke kan klare analytisk, muligheder for at studere differentiaalligninger, hvor ikke-lineære led giver anledning til kaotisk opførsel, samt muligheder for at arbejde med koblede differentiaalligninger.
- Grundlæggende elementer i en kvalitativ analyse af differentiaalligninger er fælles kernestof. Nogle hold kan vælge at udbygge dette til en diskussion af opstilling af differentiaalligningssystemer og en kvalitativ analyse af sådanne med fokus på begreber som stabilitet og ligevægt. Matematiske værktøjsprogrammer kan anvendes til at tegne såvel linje-elementer som faseportrætter og derved understøtte arbejdet med begreberne.

På [fagets side på emu'en](#) er der placeret en række yderligere materialer til inspiration.

2.f Geometri og vektorer

Ifølge læreplanen skal eleverne kunne ”opstille geometriske modeller og løse geometriske problemer på grundlag af trekantsberegninger, samt kunne give en analytisk beskrivelse af geometriske figurer i koordinatsystemer og udnytte dette til at svare på givne teoretiske og praktiske spørgsmål”.

I folkeskolen har eleverne arbejdet med geometrisk modellering og løsning af problemer med geometrisk indhold ved tegning og måling, konstruktion og simple beregninger. Men eleverne starter ofte i gymnasiet med meget forskellige forudsætninger. Et fælles grundlag for holdets arbejde med geometri kan tilvejebringes gennem forskellige kortere undervisningsforløb. Det kan være elementærgeometriske forløb, der illustrerer opbygningen af en matematisk teori, og hvor fokus er på det matematiske ræsonnement. Det kan også være eksperimentelle forløb, hvor dynamiske geometriprogrammer inddrages. Sætningerne om vinkelsum i trekanter og i n-kanter kan lægge op til induktive metoder, mens beregninger af arealer i kvadrater, rektangler, trekanter, parallelogrammer, trapezer mv. kan lægge op til deduktive metoder. Med udgangspunkt i elevernes viden om Pythagoras læresætning, kan der tilrettelægges et forløb om bevisteknik, hvor der søges på nettet eller i litteraturen efter forskellige beviser, som eleverne i par eller grupper tilegner sig og gennemgår for øvrige i klassen.

Uanset hvilke former, der vælges, forventes det, at eleverne opnår kendskab til de grundlæggende begreber og betegnelser fra den klassiske geometri, således at de kan håndtere følgende ved en skriftlig eksamen:

- I en trekant ABC er $\angle C = 38^\circ$, $h_a = 35$, $m_a = 37$. Fodpunktet for h_a og m_a kaldes henholdsvis H og M , og det oplyses at $\angle AMC$ er spids. Tegn en skitse af trekanten. Bestem de ukendte sider og vinkler i trekant ABC .
- I en trekant ABC er vinkelhalveringslinjen $v_A = 12$, $\angle B = 40^\circ$ og $b = 14$. Tegn en model af situationen og bestem de ukendte sider og vinkler i trekant ABC .

Arbejdet med geometriske og trigonometriske problemer vil ofte tage udgangspunkt i givne tegninger. Men elevernes kompetence til at behandle sådanne problemer kan yderligere styrkes ved at opøve evnen til at tegne modeller, der kan anvendes som grundlag for beregninger ud fra et givet forlæg. Udgangspunktet kan være problemer som højdemåling af bygninger eller afstandsmåling i et landskab, og forlægget kan være tegninger, fotografier eller egne opmålinger. I nogle forløb kan det være naturligt at inddrage klip fra matematikhistoriske tekster. I andre kan det eksempelvis være moderne tekster, der vedrører konstruktion af bygninger.

Ifølge læreplanen omfatter kernestoffet: ”forholdsregninger i ensvinklede trekanter og trigonometriske beregninger i vilkårlige trekanter”. Det forudsættes endvidere, at elevernes viden om den Pythagoræiske læresætning fastholdes. Beregninger kan ligeledes foretages i dynamiske geometriprogrammer. De trigonometriske funktioner indføres med præcise definitioner og ikke alene som et beregningsværktøj.

Begrebet kongruens omtales i sammenhænge, hvor det naturligt indgår som en del af et matematisk ræsonnement. De særlige egenskaber der knytter sig til trekantens forskellige linjer, indskrevne og omskrevne cirkler kan inddrages i mange forskellige typer forløb, men udgør ikke en del af det fælles kernestof

Ifølge læreplanen omfatter kernestoffet endvidere: ”vektorer i to og tre dimensioner givet ved koordinatsæt, anvendelser af vektorbaseret koordinatgeometri til opstilling og løsning af plan- og rumgeometriske problemer”. Uanset hvordan vektorer introduceres, forventes det, at eleverne er fortrolige med vektorbegrebet. Ved skriftlig eksamen vil eleverne udelukkende møde vektorer på koordinatform.

Det forventes, at eleverne ved skriftlig eksamen behersker regnereglerne for vektorer og de elementære operationer som at finde tværvektor til en given vektor i planen, at bestemme skalarproduktet mellem to vektorer og kunne fortolke dette tal, at kunne bestemme determinanten mellem to vektorer i planen og kunne fortolke dette tal, at kunne bestemme krydsproduktet mellem to rumgeometriske vektorer og kunne fortolke denne vektor, samt at kunne finde projektionen af en vektor på en vektor.

Den analytiske geometri behandles både i 2 og i 3 dimensioner som en vektorbaseret koordinatgeometri, hvor eleverne ved skriftlig eksamen forventes at kunne:

- Opstille og omskrive ligninger for cirkler og kugler, bestemmelse af tangenter og tangentplaner.
- Omskrive frem og tilbage mellem ligning og parameterfremstilling for linjer i planen.
- Bestemme ligning for planer og parameterfremstilling for linjer i rummet.
- Bestemme evt. skæringspunkter mellem linjer, mellem linjer og planer, og mellem linjer og cirkler, henholdsvis linjer og kugler.
- Bestemme vinkler mellem linjer, mellem linjer og planer og mellem to planer.

- Bestemme afstande mellem punkter, og i planen: afstand fra punkt til linje og i rummet fra punkt til plan.

2.g Matematisk ræsonnement og teori

Ifølge læreplanen skal eleverne kunne ”redegøre for matematiske ræsonnementer og beviser, samt deduktive sider ved opbygning af matematisk teori”.

Eleverne skal møde den matematiske teori og selv arbejde med forskellige elementer af matematisk ræsonnement gennem hele gymnasieforløbet og inden for alle områder af undervisningen. Kun derved kan eleverne opnå en sådan fortrolighed med matematisk tankegang, at de i en problembehandling umiddelbart vil skelne mellem ”hvad man ved”, ”hvad man antager” og ”hvad man ønsker at vide”. Det gælder uanset emnet er ren matematisk teori, eller det drejer sig om anvendelse af matematik til løsning af givne problemer. I skriftlige rapporter og mundtlig fremstilling skal de kunne fremlægge denne indsigt på en sådan måde, at det matematiske argument og den matematiske tankegang fremstår klart. Det kan eksempelvis dreje sig om:

- et samarbejde i 1. g med naturvidenskabeligt grundforløb om matematisk modellering af givne data
- en statistisk analyse i 2. g i et forløb sammen med samfundsfag
- en ren matematikrapport i 3. g over et forløb om Euklids femkantskonstruktion.

Kernestoffet omfatter ifølge læreplanen specifikke krav om ”udledning af udvalgte differentialkvotienter”, samt ”bevis for sammenhængen mellem areal og stamfunktion”. Derudover skal det supplerende stof ifølge læreplanen omfatte ”ræsonnement og bevisførelse inden for infinitesimalregning, samt deduktive forløb over udvalgte emner”.

Uanset hvilke emner der arbejdes med på det enkelte hold, forventes det, at eleverne opnår en sådan indsigt i fagets deduktive natur, at de uden vanskeligheder forstår at skelne mellem forudsætninger, definitioner og sætninger, samt at de kan redegøre for, dvs. selvstændigt fremlægge, de bærende ideer i en række centrale beviser inden for forskellige af fagets områder. Denne side af matematikkens væsen kan introduceres allerede i 1. g gennem et eksemplarisk materiale, der både rummer muligheder for eleveksperimenter, for en diskussion af kategorier som forudsætninger, sætning og bevis samt en diskussion af det induktive contra det deduktive, og som samtidig rummer fascinerende problemstillinger. Det kan være et materiale vedrørende Eulers polyedersætning, Goldbachs formodning, broerne i Königsberg, isoperimetriske problemer, simple 1-fejls detekterende koder som ISBN-koder, sandsynlighedsteoretiske paradokser, simple LP-problemer (LP = lineær programmering) osv. Senere i gymnasieforløbet kan man vælge at fordybe sig i et eller flere af disse.

Men der er i øvrigt stor frihed til på det enkelte hold selv at vælge inden for hvilke områder, man går i dybden med den matematiske teori:

- I arbejdet med opstilling og omformning af formeludtryk, ved løsning af ligninger og ved introduktion af nye matematiske emner kan der sættes fokus på betydningen af at have og betjene sig af et præcist matematisk sprog, som er internationalt, og som alle fagets udøvere kender. Der kan arbejdes med et eksempelmateriale præget af mangler i den matematiske præcision. Eller der kan søges på nettet efter matematiske fremstillinger fra alverdens lande.
- Allerede i grundforløbet kan man diskutere den forskellige karakter af de regler, som udnyttes, og som ofte kendes fra folkeskolen. Et eksempelmateriale med både korrekte og

- forkerte metoder til løsning af ligninger – herunder såkaldt falske løsninger på CAS-værktøjer – kan fremme en sådan diskussion og afklaring.
- Udnyttelser af regressionsfaciliteter i en matematisk modellering (se [Eksempel 201](#)) kan både give anledning til, at der – evt. i et samarbejde med andre fag - sættes fokus på kategorierne: ”hvad man ved”, ”hvad man antager” og ”hvad man ønsker at vide” samt på forskellen mellem en matematisk sammenhæng mellem variable og en årsagssammenhæng. Men det kan også give anledning til et lille forløb om, hvilket ræsonnement der kan ligge bag begrebet ’bedste rette linje’.
 - I den indledende geometri (se [Eksempel 111](#)) er der rige muligheder for at eleverne selv arbejder med at formulere enkle sætninger, gennemfører små beviser og herved opnår en vis indsigt i matematikkens væsen. En diskussion af gradtallet for sfæriske trekanter eller af parallelitet i perspektivgeometri kan sætte fokus på betydningen af at gøre sig forudsætningerne for det matematiske ræsonnement klart. Senere kan man evt. vende tilbage og gennemføre forløb over andre dele af den klassiske geometri eller over sådanne emner som sfærisk, hyperbolsk eller perspektivgeometri. Et sådant forløb kunne tilrettelægges som en vekselvirkning mellem en eksperimentel tilgang og en diskussion af den aksiomatisk-deduktive opbygning af matematisk teori.
 - Inden for den vektorbaserede koordinatgeometri kan man vælge hurtigt at nå frem til anvendelser og metoder, men teorien for vektorer og vektorregning er også et velegnet eksempel på en deduktivt opbygget matematisk teori, som elever i gymnasiet i hovedsagen godt kan tilegne sig.
 - Udledning af de trigonometriske relationer for vilkårlige trekanter eller af betingelserne for løsning af 2. gradsligningen og af løsningsformlen, når der er reelle løsninger, giver muligheder for at sætte fokus på, hvorledes et matematisk ræsonnement ofte bevæger sig gennem én sammenhængende kæde af implikationer.
 - Inden for emnet infinitesimalregning kan man gennemføre forløb over sådanne elementer af analysens grundlag som de reelle tals opbygning og udledning af kontinuitetssætningerne. Eller man kan tage udgangspunkt heri og gennemføre forløb over maks-min-sætningen, middelværdisætningen og monotonisætningen. Man kan også tage udgangspunkt i middelværdisætningen og gennemføre forløb over konvekse funktioner og betydningen af f'' (se [Eksempel 113](#)). En række af sådanne forløb rummer eksempler på indirekte beviser, eksistensbeviser kontra konstruktive beviser og forskelle mellem implikation og bi-implikation.
 - Arbejdet med monotonisætningen kan senere inden for integralregningen blive fulgt op af et forløb med beviser for fundamentalsætningen og for sætningen om mængden af stamfunktioner til en given kontinuert funktion. Har man derimod gennemført forløb over kontinuitetssætningerne kan dette under integralregningen blive fulgt op af forløb over eksistensen af arealet under grafen for en positiv kontinuert funktion, defineret på et begrænset interval.
 - Under arbejdet med differentiallyigninger kan man vælge at gennemføre forløb over løsningsmetoder til lineære, logistiske, generaliserede logistiske eller lineære 2. ordens differentiallyigninger, løsningsmetoder der anvender substitution og som bygger på monotonisætningen (se [Eksempel 114](#)). Sådanne eksempler kan både illustrere matematikkens hierarkiske struktur og en af de grundlæggende metoder i megen problembehandling: at oversætte et komplekst problem til et mere simpelt problem, som vi allerede har styr på.
 - Under infinitesimalregningen kan man også tilrettelægge forløb, der ud fra kontinuitetssætningerne og strengt deduktivt udleder eksistensen og egenskaberne ved

logaritmefunktionerne. Eller man kan gennemføre forløb over Taylor-rækker eller andre forløb over approksimerende funktioner. Man kan tilrettelægge forløb over l'Hospitals regler, forløb over størrelsesforholdet mellem eksponentielle, logaritmiske og potensfunktioner.

- Megen matematisk modellering vil have nytte af at tage udgangspunkt i ”hvad man ved”, ”hvad man antager” og ”hvad man ønsker at vide”. Identifikation af variable, viden om relationer mellem disse, samt antagelser om årsagssammenhænge vil ofte bygge på en faglig viden fra andre fag. Men matematiske metoder er afgørende for at oversætte problemet til ét, som man kan håndtere. Det kan dreje sig om infinitesimale betragtninger i kinematik og ved kemiske reaktionsprocesser, ræsonnement om arvelighed og andre genetiske spørgsmål på grundlag af Bayes sætning, opstilling af LP-modeller til optimering af en ressourceudnyttelse under visse ydre betingelser eller andet.
- Den successive udvidelse af talmængderne kan give anledning til at fordybe sig i de rationale og irrationale tals karakteristiske egenskaber, til forløb over nogle egenskaber ved primtallene – og anvendelserne heraf i moderne matematik som kryptologi – samt til forløb over nogle af egenskaberne ved tal som π og e . Men det kan også give anledning til forløb om uendelighedens paradokser. Sådanne forløb indeholder ofte ret avancerede matematiske ræsonnementer – beviser, der arbejder med modstrid eller med matematisk induktion – og kræver derfor en vis matematisk modenhed, hvis eleverne skal have fuldt udbytte.

På [fagets side på emu'en](#) er der placeret en række yderligere materialer til inspiration.

Det matematiske ræsonnement og det matematiske bevis er ikke kun et værktøj til at godtgøre den valgte metode eller den givne sætning. Reduceres matematik til metoder, anvendelser af sætninger og indlæring af procedurer, går en væsentlig del af faget tabt. Beviserne og de matematiske ræsonnementer udgør en stor del af den matematiske teori, og først tilegnelsen af beviset giver indsigt i, hvorfor en sætning eller en metode er gyldig, og hvorfor netop sætningens forudsætninger er nødvendige.

Dette aspekt kan fremhæves ved at præsentere eleverne for vidt forskellige beviser for samme sætning. Det kan være isoperimetriske problemer, der dels behandles med geometriske metoder, dels med anvendelse af differentialregning. Det kan være bestemte egenskaber ved keglesnit, der kan vises klassisk geometrisk eller ved analytiske metoder. Det kan være forskellige løsningsmetoder over for givne differentilligninger. Eller det kan være forløb, hvor eleverne selv på nettet finder forskellige beviser for Pythagoras læresætning og gennemgår dem for hinanden med fokus på forudsætninger og de forskellige typer ”hvis-så” argumenter. Uanset hvordan man griber det an, er formålet, at eleverne ser, at det enkelte bevis rummer en værdi i sig selv i, og med det giver en indsigt i matematik ud over selve sætningen.

2.h Anvendelser af matematik – matematik i samspil med andre fag

Ifølge læreplanen skal eleverne kunne ”*demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder, herunder viden om anvendelse i behandling af en mere kompleks problemstilling*”.

Endvidere skal de kunne ”*demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske, videnskabelige og kulturelle udvikling*”.

At demonstrere viden om matematikanvendelse betyder, at man på reflekteret vis kan præsentere et stof, man har arbejdet med. Der ligger således ikke heri en forestilling om, at eleverne selvstændigt

kan tage fat på en matematisk problembehandling og modellering af et materiale eller en problemstilling, der foreligger i umiddelbar og ubearbejdet form.

Men gennem et samarbejde med eller ved at inddrage viden fra andre fag kan man overveje, hvilke forenklinger, idealiseringer og abstraktioner der er acceptable i den givne situation, og som danner grundlag for en matematisering. Ved at generalisere disse metoder kan der vindes indsigt i muligheder og begrænsninger i en matematisk modellering. Men man kan ikke forvente, at eleverne opnå en egentlig rutine i matematisk modellering af komplekse problemstillinger.

I afsnit 3.4 vil matematikanvendelse i både grundforløb og studieretningsforløb blive eksemplificeret.

At demonstrere viden om hvordan matematik har udviklet sig i et samspil med det omgivende samfund, betyder tilsvarende, at man på reflekteret vis kan præsentere et stof, man har arbejdet med. Der ligger således ikke heri en forestilling om, at eleverne selvstændigt kan redegøre for, hvorledes hvert af de matematiske områder, de har arbejdet med, er opstået og har udviklet sig som følge af samfundets udvikling, og hvorledes matematikkens egen udvikling har virket tilbage på åndsliv, videnskab og teknologi.

Men gennem et samarbejde med andre fag eller ved at inddrage viden fra andre fag kan der gennemføres eksemplariske forløb, der i et koncentrat viser fagets rolle i menneskehedens bestræbelser på at magte naturens kræfter og forstå sin egen og Jordens oprindelse, opnå indsigt i himmellegemernes bevægelser og i lovene for at indse og afbilde det, vi ser, rejse mægtige bygningsværker opad og turde rejse ud over havenes horisont, at måle og veje, at skabe uhyrlige våben, men også at bidrage til velstand og til at sætte argumentet i centrum for menneskenes civiliserede omgang med hinanden.

Ifølge læreplanens omtale af supplerende stof skal dette omfatte ”*matematik-historiske forløb*”. Dette kan både realiseres i forløb, der er integreret med arbejdet med kernestoffet, i selvstændige forløb eller i et samarbejde med andre fag.

I afsnit 3.4 vil mulighederne for et samarbejde med andre fag blive belyst gennem en række eksempler.

2.i Anvendelse af it

Ifølge læreplanen skal eleverne kunne ”*anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer*”.

I de foregående dele af vejledningens afsnit om faglige mål og fagligt indhold er dette behandlet i tilknytning til de enkelte faglige områder.

I næste afsnit om tilrettelæggelse vil anvendelse af it blive behandlet i tilknytning til selve undervisningen.

I afsnit 4.2 om prøveformer er der endelig en række kommentarer om anvendelse af it ved besvarelser af de skriftlige eksamensopgaver.

3. Tilrettelæggelse

Ifølge læreplanens afsnit 3.1 skal ”undervisningen tilrettelægges med henblik på, at den enkelte elev når de faglige mål. I centrum for undervisningen skal stå elevernes selvstændige håndtering af matematiske problemstillinger og opgaver”.

Videre hedder det: ”Undervisningen tilrettelægges med progression i arbejdsmetoder og fagligt indhold samtidigt med, at grundlæggende færdigheder og paratviden fastholdes ved regelmæssigt at blive taget op igen.”.

Begrebsindlæring og udvikling af evne til at anvende de matematiske begreber er en kompliceret proces. Som lærer må man være opmærksom på elevernes faglige forudsætninger og evne til abstrakt tænkning hver gang, man tager fat på et nyt emne. Dette gælder i særlig grad i starten af 1. g. Den måde, matematikken præsenteres på i lærebøger, er ikke nødvendigvis den samme som den måde, eleverne lærer faget på. Elevernes tilegnelse af fagligt stof vil i nogle sammenhænge starte med lærerens præsentation af bestemte metoder, men i andre sammenhænge starte med, at eleverne prøver sig frem. Forståelse for fagets deduktive opbygning forudsætter en abstraktionsevne, som langsomt må opbygges og trænes af eleverne, bl.a. gennem de eksperimentelle tilgange til faget. Eleverne skal skabe og udvikle deres matematiske begrebsapparat, således at de kan aktivere det i relevante situationer, og det sker bedst ved, at eleverne aktivt og selvstændigt arbejder med faget. Derfor kræver matematiklæring bl.a., at eleverne går i dialog med hinanden og med læreren for herigennem at udvikle deres begrebsbeherskelse.

Elevernes selvstændige arbejde med faget og progressionen med hensyn til arbejdsmetoder og fagligt indhold vedrører alle sider af undervisningens tilrettelæggelse. Det vedrører tilegnelsen af matematiske begreber gennem en vekselvirkning mellem eksperimentelt anlagte forløb og deduktive forløb. Det vedrører arbejdsformer som gruppearbejde og den enkelte elevs selvstændige arbejde med matematiske tekster. Det vedrører projektførelse og udformning af skriftlige besvarelser og rapporter. Og uanset hvor man er i undervisningen, skal det altid overvejes, hvorledes it-værktøjer kan udnyttes til at støtte såvel færdighedsindlæring som den matematiske begrebsdannelse.

Det er ikke entydigt, at bestemte arbejdsformer matcher eksakte faglige niveauer, men arbejdsmetoder bør generelt understøtte elevernes udvikling gennem forløbet som led i udvikling af studiekompetencen.

Forskellige pædagogiske metoder kan derfor anvendes forskelligt afhængigt af niveau og forløb. Mundtlig fremlæggelse om små, meget afgrænsede matematiske emner kan være en god træning i begyndelsen af forløbet, mens større fremlæggelser vil kunne anvendes senere i forløbet, fx en fremlæggelse af regneregler for differentiable funktioner.

Til hver tid i et forløb kan elevens selvstændige arbejde være et nyttigt redskab til læring, men der kan være stor forskel på, hvordan et selvstændigt arbejde tilrettelægges. Hvor eleverne i selvstændigt arbejde i begyndelsen af et forløb bør have meget støtte både fagligt og med hensyn til arbejdsform, kan elevernes selvstændige arbejde senere i forløbet i højere grad være selvhjulpent. Særligt ved meget selvstændigt gruppearbejde samt projekt- og emneforløb må man være indstillet på, at disse arbejdsformer kræver en del træning.

Måden at læse lektier bør også udvikles gennem forløbet.

I de tilfælde, hvor undervisningen på A-niveau foregår parallelt med undervisningen på B-niveau er det vigtigt, at lærerne aftaler en progression i de to forløb.

3.a Eksperimenterende tilgang

I læreplanens afsnit 3.1 hedder det: ”Gennem en eksperimenterende tilgang til matematiske emner, problemstillinger og opgaver skal elevernes matematiske begrebsapparat og innovative evner udvikles. Dette sker bl.a. ved at tilrettelægge nogle forløb induktivt, så eleverne får mulighed for selvstændigt at formulere formodninger ud fra konkrete eksempler.”

Forståelse af matematiske begreber har både et intuitivt og et formelt grundlag, og oftest er den intuitive forståelse en forudsætning for den formelle. Særligt den intuitive forståelse understøttes ved induktive undervisningsforløb. Den eksperimenterende tilgang og induktive metode i undervisningen skal stimulere eleverne til selv at prøve sig frem og forsøge forskellige løsningsmetoder over for et givet problem. At prøve sig frem kan give et bedre overblik og dermed give ideer til en løsningsstrategi ved arbejdet med et matematisk problem. Den eksperimenterende og induktive tilgang kan således også bidrage til at udvikle elevernes problemløsningsevne:

- I et lille forløb om hele tal og primtal kan man i fællesskab vise, at produktet af ulige tal er ulige, og dernæst lade eleverne selv formulere og bevise beslægtede små sætninger. I et lidt større forløb om Fibonacci-tal er der ligeledes gode muligheder for at eksperimentere og selv finde sammenhænge.
- I den indledende geometri kan eleverne selv argumentere for formler for vinkelsummer i en n-kant på basis af sætningen om vinkelsummen i en trekant, selv finde formler for arealer af parallellogrammer, trapezer mv., eller de kan selv i et dynamisk geometriprogram eksperimentere og formulere sætninger om trekanters karakteristiske linjer og de om- og indskrevne cirkler.
- I det indledende arbejde med variabelbegrebet og diskussion af mulige variabelsammenhænge (se [Eksempel 123](#)) kan der gennemføres eksperimenterende forløb over ’tilfældige rektangler’, om rektanglers sider, omkreds og areal samt sammenhængen mellem disse størrelser. Forløbet fører naturligt til, at der rejses optimeringsproblemer.
- Undersøgelse af karakteristiske egenskaber ved elementære funktioner eller simple kombinationer af disse kan lægges ud til eleveksperimenter med anvendelse af grafiske værktøjsprogrammer.
- I differentialregningen kan man i fællesskab udlede differentialkvotienterne for eksempelvis x^2 og \sqrt{x} , og dernæst lade eleverne arbejde med at udnytte tretrinsreglen (se [Eksempel 121](#)) til at udlede differentialkvotienter af udtryk som $(f(x))^2$ og $\sqrt{f(x)}$, hvor $f(x)$ er en differentiabel funktion.
- Et forløb om tangentbestemmelse kan tilrettelægges så eleverne eksperimenterer sig frem med anvendelse af grafiske værktøjsprogrammer.
- I statistik vil mange forløb indeholde eksperimenterende elementer, eksempelvis forløb med undersøgelse af et stort datamateriale på basis af stikprøver (se [Eksempel 221](#)).
- I den analytiske rumgeometri kan eleverne ved hjælp af applets eksperimentere med krydsproduktet og selv nå frem til at formulere reglen om krydsproduktets retning.
- I et forløb om differentiaalligninger (se [Eksempel 141](#)) kan CAS-værktøjer udnyttes til at få tegnet billeder af linjeelementer og dermed give en ny dimension i tilgangen til og diskussionen af differentiaalligninger, og bl.a. give et bedre grundlag for en diskussion af, hvilke kvalitative egenskaber man kan udlede af en differentiaalligning.

På [fagets side på emu'en](#) er der placeret en række yderligere materialer til inspiration..

CAS-værktøjer er meget velegnede til induktive forløb. I læreplanen står: ”CAS-værktøjer skal ikke blot udnyttes til at udføre de mere komplicerede symbolske regninger, men også understøtte færdighedsindlæring og matematisk begrebsdannelse.” Med CAS-værktøjer har man helt nye muligheder, idet eksperimentel tilgang nu er forholdsvis ukompliceret, da værktøjet kan udføre besværlige udregninger og tegne komplicerede diagrammer næsten øjeblikkeligt. På denne måde kan undervisningen tilrettelægges, så eleverne gennem en række forsøg erfarer sammenhænge, dernæst formulerer hypoteser og formodninger for endelig i slutningen af forløbet at bevise disse regler. Dette er yderligere kommenteret i it-afsnittet.

3.b Deduktive forløb

”Det eksperimenterende element i matematik kan ikke stå alene. Derfor skal udvalgte emneforløb tilrettelægges, så eleverne får en klar forståelse af den deduktive opbygning af matematisk teori”, står der i læreplanen. Det er vigtigt, at eleverne oplever matematik som et fag, hvor eksperimentelle tilgange er meget nyttige, men at matematik ikke er et eksperimentelt fag som de naturvidenskabelige fag. Videnskabsfaget matematik er et deduktivt opbygget fag, der bygger på aksiomer, begrebsdefinitioner og logik. Deduktive forløb kan både være ganske korte og have karakter af større emneforløb:

- Et forløb om den aksiomatiske opbygning af Euklids Elementerne (se [Eksempel 111](#)) kan tilrettelægges på mange måder. Man kan fx vælge at følge sporet fra starten til Euklids bevis for den Pythagoræiske læresætning eller til hans femkantskonstruktion. Man kan også gennemføre en første del fælles og tilrettelægge en anden del som projekter, hvor eleverne selv vælger et blandt flere. Endelig kan man vælge at fordybe sig i manglerne hos Euklid, fremdrage diskussioner heraf gennem historien og præsentere Hilberts udbygning af Euklids aksiomsystem.
- Den successive udvidelse af talmængderne kan give anledning til forskellige deduktive delforløb, fx om konstruktionen af de rationale tal eller om de reelle tals opbygning. Man kan også vælge at sætte fokus på udvidelser via krav om løsning til bestemte ligninger og præsentere indledende algebra og gruppeteori. Eller man kan tage udgangspunkt i en intuitiv opfattelse af de reelle tal og gennemføre et forløb om de komplekse tal.
- Udvidelsen af potensbegrebet og indførelsen af rodbegrebet kan gennemføres som et deduktivt forløb. Matematisk induktion er dog næppe velegnet til første del af gymnasieforløbet.
- Hovedsætningerne om kontinuerte funktioner kan behandles i et strengt deduktivt forløb, der tager udgangspunkt i de reelle tals opbygning
- Hovedsætningerne om differentiable funktioner (se [Eksempel 113](#)) kan behandles i et strengt deduktivt forløb, der tager udgangspunkt i de kontinuerte funktioners egenskaber. Og det kan bygges ud til et forløb om konveksitet af grafer og betydningen af f'' .
- Et forløb om funktioners størrelsesorden kan tilrettelægges strengt deduktivt.
- Et forløb om den naturlige logaritmefunktionens eksistens og egenskaber kan tilrettelægges som et strengt deduktivt forløb med udgangspunkt i integralregningens resultater.
- Løsning af lineære første- og anden-ordens differentialligninger (se [Eksempel 114](#)) og af logistiske differentialligninger kan tilrettelægges som et deduktivt forløb, der tager udgangspunkt i kendskab til differentiationsregler og til monotonisætningen.

3.c Den mundtlige dimension

I læreplanens afsnit 3.1 hedder det: *”Den enkelte elevs forståelse af matematik skal udvikles gennem arbejde med mundtlig formidling.”*

I undervisningstilrettelæggelsen inddrages både overvejelser om variation i undervisningsmetoder og progression i forhold til selvstændighed, omfang og præcision i brugen af det matematiske sprog. Arbejdsformer som lærergennemgang og klassediskussioner, gruppearbejde, par-arbejde, store og små elevforedrag kan alle give gode rammer for arbejdet med mundtligheden. Invitation af en gæsteforelæser eller besøg på en videregående uddannelsesinstitution med foredrag af professionelle matematikere kan både give eleverne indtryk af nødvendigheden i at opøve evnen til at koncentrere sig om en mundtlig fremstilling og dialog i længere tid ad gangen og give dem et glimt af de spændende og udfordrende problemstillinger, faget arbejder med på dét niveau.

Kravene til præcision og forventningerne til fyldigheden af den enkelte elevs bidrag til en klassediskussion ændrer sig gennem hele gymnasieforløbet. Denne udvikling kan stimuleres ved at tilrettelægge forløb, hvor eleverne selv bruger det matematiske sprog i fremlæggelse og diskussion i par eller grupper.

3.d Gruppearbejde

I læreplanens afsnit 3.2 hedder det: *”En del af undervisningen tilrettelægges som gruppearbejde med henblik på at udvikle elevernes matematiske begreber gennem deres indbyrdes faglige diskussion.”*

Ved gruppearbejde arbejder eleverne selvstændigt med faget under lærerens vejledning. Gruppearbejde kan være kortere og forholdsvis stramt styrede forløb, hvor alle elever arbejder med samme forlæg. Det kan være opgaver/øvelser, gangen i et bevis i lærebogen eller spørgsmål til andre tekster med matematisk indhold. I gruppearbejdet vil undervisningen næsten af sig selv være tilpasset elevernes niveau, idet ikke alle grupper arbejder på lige højt fagligt niveau og ikke når lige langt, og som lærer kan man tilpasse sin vejledning af hver gruppe herefter. Det vil oftest være formålsløst at afslutte et gruppearbejde, hvor alle elever har arbejdet med samme emne, med en klassegennemgang eller en elevfremlæggelse af emnet, fordi udbyttet af denne form for afrunding på gruppearbejdet for det meste er meget ringe, og kan virke demotiverende på eleverne. En evaluering direkte i grupperegi (skriftligt eller mundtligt) vil ofte give et meget større udbytte for den enkelte.

I klassediskussionen er eleverne med til at sætte dagsordenen, og læreren går her i dialog med eleverne. Her er det vigtigt, at man som lærer ikke konstant retter forkerte elevudsagn, og selv siger det korrekte, men tværtimod hele tiden arbejder bevidst med elevernes anvendelse af sprogbrugen og diskuterer forkerte opfattelser af begreberne. Denne form kan være god til fx at diskutere løsninger af en opgave, hvor de forskellige elevforslag diskuteres i klassen.

Den traditionelle lærergennemgang af matematisk stof (forelæsningen) har også sine fortrin, idet mange elever får stoffet gennemgået samtidigt: Men den har samtidig den ulempe, at alle elever skal følge med i samme tempo og på samme niveau. Derfor vil denne form egne sig bedst til tidsmæssigt kortere forløb. Eleverne ser og hører herved de matematiske begreber anvendt på korrekt måde og får herved indtryk af korrekt matematisk sprogbrug, hvor læreren optræder som ”rollemodel”.

3.e Arbejdet med matematiske tekster

I læreplanens afsnit 3.2 hedder det: ”Der arbejdes bevidst med den mundtlige dimension, herunder selvstændig tilegnelse, bearbejdning og præsentation af forelagte matematiske tekster.”

Udvikling af elevernes færdigheder i at læse en forelagt matematisk tekst selvstændigt har betydning for elevens studiefærdighed såvel på de videregående uddannelser som i gymnasiets matematikundervisning. At fokusere på evnen til at læse en matematisk tekst selvstændigt betyder, at selve det at læse en matematisk tekst får en større plads i undervisningen. Nødvendigheden af at kunne læse en matematisk tekst starter allerede ved løsningen af en lidt mere kompliceret opgave, noget som forudsætter, at man kan forstå den koncentrerede fremstilling, og fx kan identificere variable og sammenhænge mellem dem. Det er ikke noget eleven kan i forvejen, og derfor skal det trænes, fx i opgaver som:

- I et koordinatsystem er der givet to punkter A og B , en lineær funktion f og en eksponentielt voksende funktion g , hvis grafer begge går gennem punkterne A og B . For enhver værdi af x er $P(x, f(x))$ et punkt på grafen for f og $Q(x, g(x))$ et punkt på grafen for g . Bestem den størst mulige værdi af $|PQ|$, når $x \in [1;4]$.
- I vedproducerende skovbrug er langsigtet planlægning nødvendig, idet fx en bøg fældes, når den er 90-120 år. I en redegørelse fra 1983 skriver Skovstyrelsen til Miljøministeriet, at arealet af de private bøgeskove er aftaget siden 1930'erne. Styrelsen forventer, at dette areal i fremtiden vil blive reduceret med 0,9 % pr år, hvor udviklingen fra årene før 1983 fortsætter. I det følgende antages at skovstyrelsens forudsigelse holder. Hvor mange procent vil arealet af private bøgeskove være reduceret med i år 2083 sammenlignet med arealet i 1983?
- I en model for bakteriesygdommes udbredelse går man ud fra, at den funktion $I(t)$, der angiver antallet af smittede til tiden t (målt i uger), er en løsning til en differentia ligning af formen: $\frac{dI}{dt} = I(rN - k - rI)$, hvor N , r og k er konstanter. N er befolkningens størrelse, og r og k afhænger af sygdommens smitsomhed og infektionens varighed. I en bestemt situation kender vi talværdier for de tre konstanter samt antallet af smittede til tiden $t = 0$. Bestem en forskrift for I samt det tidspunkt, hvor 10 % af befolkningen er blevet smittet.

Men også det at læse en gennemgået matematisk tekst (se [Eksempel 161](#)) er noget, eleven skal lære. Det er ikke indlysende for alle elever, at man ved læsning af matematik må arbejde med papir og blyant, at man må stille spørgsmål til teksten, at man må tage notater, at man må udføre alle mellemregninger. At vejlede eleven i at læse en matematisk tekst kan gribes an på mange måder. Fx kan man give eleven en opskrift på, hvordan man læser en matematisk tekst, og man kan prøve at tydeliggøre, hvilke ligheder og forskelle der er mellem at læse en matematisk tekst og tekster i andre fag. Man kan udarbejde arbejdsspørgsmål til en tekst, som eleverne har for. Man kan bede eleverne aflevere deres studienotater fra hjemmearbejdet med en tekst. Man kan lade dem læse mindre matematiske tekster, som ikke er gennemgået, og som de skal gøre rede for.

At læse en forelagt matematisk tekst selvstændigt (se [Eksempel 162](#)) er i princippet ikke så forskelligt fra at læse en gennemgået matematisk tekst. Og at læse en tekst selvstændigt kan være et led i at lære at læse også gennemgåede tekster. Men selvstudium kræver et større fagligt overblik hos eleven end niveauet i teksten, og derfor må de valgte tekster i sværhedsgrad selvfølgelig ikke overstige elevens faglige niveau. De benyttede tekster kan være af mange forskellige slags: Opgaver, eksempler fra lærebogen, udvalgte sider fra lærebogen, oversigtsartikler, artikler fra populærvidenskabelige magasiner, tekster fra internettet, artikler fra aviser, annoncer osv.

3.f Projektforløb og emneforløb

I læreplanens afsnit 3.2 hedder det: *”En betydelig del af undervisningen tilrettelægges som projekt- eller emneforløb over forskellige dele af kernestoffet og det supplerende stof eller problemstillinger, der er genstand for fagsamarbejde. For hvert større forløb formuleres faglige mål, der tages stilling til arbejdsprocessen, og eleverne udarbejder et skriftligt produkt, som kan dokumentere de faglige resultater eller konklusioner vedrørende en tværfaglig problemstilling.”*

En række projektforløb eller større sammenhængende opgaver vil være knyttet til matematiks samarbejde med andre fag. Både formuleringen af projektet, henholdsvis den større opgave, arbejdsform og tidsforbrug samt produkt og evalueringsform skal således aftales mellem de involverede lærere og med eleverne.

Et projektforløb er ikke en entydig størrelse, men kan defineres på flere måder, som hver for sig har fordele og ulemper i forhold til en given undervisningssituation. Den enkelte lærer må derfor i den givne situation, på det givne trin i undervisningen og ud fra stoffets karakter samt sit kendskab til det pågældende hold nøje overveje, hvilken form der er mest hensigtsmæssig. Men fælles for alle projektforløb er, at det starter med en problemformulering, at eleverne arbejder selvstændigt undervejs, og at det slutter med et produkt.

En problemformulering er oftest formuleret som en afgrænset fagligproblemstilling, der behandles og besvares gennem projektarbejdet. Problemformuleringen kan udarbejdes af eleverne selv, enkeltvis eller i grupper. Men dette kan være en tidkrævende proces, og valg af denne form er normalt forbundet med, at det er et bevidst mål for undervisningsforløbet, at eleverne skal lære at formulere egne spørgsmål til et forelagt materiale, som eksempelvis i visse statistiske forløb.

I de fleste tilfælde vil det være en fordel, at læreren på forhånd har udarbejdet problemformuleringen/-erne. Enten kan alle grupper arbejde med samme problemformulering, eller læreren kan udarbejde flere forskellige, som eleverne så gruppevis vælger mellem.

Et selvstændigt elevarbejde med projektet kræver god forberedelse og faste aftaler. Eksempelvis aftaler om arbejdsformen i grupperne, om hvilke opgaver eller roller det enkelte gruppe medlem har, om dette går på skift, om hvordan man giver lektier for, og hvordan dette registreres, om råd og vink fra lærere, og om hvornår læreren tilkaldes for at yde direkte hjælp. Under projektarbejdet kan der opstå ønske om at ændre problemformuleringen. Det kan være en god ide, at lærere og elever på forhånd aftaler regler for, hvornår og hvordan en problemformulering kan ændres.

Alle projekter afsluttes med et produkt, der kan evalueres. Produktet kan være en rapport, et foredrag med tilhørende disposition, en synopsis, et debatindlæg til en avis eller andet. Læreren klargør fra starten kravene til produktet og aftaler på forhånd med eleverne, hvorledes projektet evalueres.

Emneforløb adskiller sig fra projektarbejde ved, at der ikke nødvendigvis foreligger en problemformulering, at eleverne ikke nødvendigvis arbejder selvstændigt i grupper i hele forløbet, og at der ikke nødvendigvis er et produktkrav. Undervisningen i et emneforløb kan veksle mellem klasseundervisning, forelæsning, elevforedrag, kortere eller længerevarende gruppearbejder, elevfremlæggelse af delresultater o.a. Forud for et emneforløb formuleres faglige delmål for

forløbet, arbejdsformen aftales med eleverne, og det fastlægges, hvordan forløbet skal evalueres; herunder evalueres det, hvordan emneforløbet har været med til at bringe eleverne videre på vej til at opfylde undervisningens mål. Faglige delmål evalueres normalt med en test.

Er der tale om et større emneforløb, der tager sigte på at dække et område af de faglige mål, afrundes forløbet med et skriftligt produkt. Dette kan være en rapport, et passende bredt udvalg af opgavetyper fra det behandlede emne, en kommenteret oversigt eller mindmap over strukturen i den behandlede matematik, et foredrag med tilhørende diskussion eller andet.

3.g Rapporter og skriftligt arbejde

I læreplanens afsnit 3.2 hedder det: *”I undervisningen lægges der betydelig vægt på opgaveløsning som en afgørende støtte for tilegnelsen af begreber, metoder og kompetencer. Løsning af opgaver foregår både i timerne og som hjemmearbejde. Endvidere arbejdes der med større skriftlige produkter som resultat af arbejdet med projekter og emner.”*

Den skriftlige dimension er et centralt element i matematik, da det både er et indlæringsredskab og et evalueringsinstrument. Det er en del af undervisningen, at eleverne vejledes med hensyn til de krav til skriftlige besvarelser, som fremgår af læreplanens bedømmelseskriterier og vejledningens afsnit 4 om bedømmelse af de skriftlige opgaver.

Arbejdet med de traditionelle matematikopgaver har til formål at opøve eleverne i problemløsning, fra det simple til det mere komplicerede. Her kan arbejdet varieres. Ofte lærer man et fag godt at kende, hvis man er god til at stille spørgsmål inden for faget. Man kunne benytte denne ide ved træningsopgaver, idet man beder eleverne om at udarbejde nogle opgavetyper, som de selvfølgelig skal kunne løse selv. Andre elever i klassen kunne så evt. løse dem. Man kan endvidere lade eleverne arbejde med at rette opgaver med bestemte fejl, som læreren har udarbejdet.

Elevernes udbytte af rettelserne vil normalt stige betydeligt, hvis slutretningen ikke står alene, men er kombineret med rettelser og kommentarer givet i løbet af skriveprocessen. En elektronisk besvarelse kan give gode muligheder for videre bearbejdning og redigering, og derfor være velegnet til at kvalificere elevernes skriftlige arbejde. Man kan fx lade dele af et opgavesæt være elektronisk med genaflevering for øje, eller man kan opdele arbejdet med et opgavesæt i forskellige faser, hvor enkeltfaser er elektroniske og genstand for kritik fra lærer eller fra andre elever.

Eleverne skal også arbejde med større matematikopgaver. Det kan ske i forbindelse med projekt og emneforløb, hvor eleverne udarbejder en rapport. Her kan et af målene være at opøve elevernes evne til skriftlig formidling. I andre forløb kan man arbejde med formidlingsopgaver, hvor eleverne skriver til en bestemt målgruppe. Det kunne fx være en artikel om kuponhæfternes tilbud om afbetalingshandel, fx computerkøb, og denne artikel kunne være til et ugeblad. Endelig kan elevernes notater også behandles som skriftligt arbejde. Eleverne kan forbedre deres notatteknik, hvis de udarbejder oversigter over de forskellige definitioner og sætningers indbyrdes relationer i fx et mindmap.

3.h It

I læreplanen står der i afsnit 3.3 om it: ”Undervisningen tilrettelægges, således at lommeregner, it og matematikprogrammer bliver væsentlige hjælpemidler i elevernes arbejde med begrebstilegnelse og problemløsning”.

Ved it i matematikundervisningen forstås håndholdt teknologi (CAS-værktøj, geometriværktøj, lommeregner) samt computerbaserede programmer (CAS-værktøj, geometriværktøj, statistikprogrammer, regneark, internet og webaplets etc.). Det er et krav at alle elever skal have adgang til et CAS-værktøj. Imidlertid kan andre mere områdespecifikke værktøjer være særdeles velegnede til at støtte elevernes arbejde med både kernestofemner og emner i det supplerende stof. Fælles for både CAS-værktøjet og andre it-værktøjer er, at de muliggør en mere eksperimenterende tilgang til begreber, emner og problemløsning i matematik.

Man kan betragte brugen af it i undervisningen ud fra to synsvinkler. Nemlig egentlig *it-baserede* forløb, som er tilrettelagt således, at it-værktøjer er en nødvendig forudsætning for, at eleverne kan arbejde med det valgte emne, fx behandling af større datasæt, og *it-støttede* forløb, hvor it ikke er strengt nødvendigt, men hvor it kan støtte den daglige undervisning.

I læreplanens afsnit 3.2 om didaktiske principper står der specielt om CAS-værktøjet, at: ”CAS-værktøjer skal ikke blot udnyttes til at udføre de mere komplicerede symbolske regninger, men også understøtte færdighedsindlæring og matematisk begrebsdannelse”. Dvs. CAS-værktøjet skal have en fremtrædende plads i undervisningen generelt og i elevernes arbejde med både teori og problemløsning.

I brugen af CAS-værktøjet kan man med fokus på den givne problemstilling diskutere kvalificeret metodevalg ved at give eleverne indsigt i værktøjets mange muligheder. Man kan også diskutere de forskellige metoders styrker og svagheder i forskellige typer af problemløsning, således at de kan skifte mellem disse, og når en metode kommer til kort, så kan en anden måske løse problemet. Eleverne bør fx i grafisk ligningsløsning opnå kendskab til disse grafiske billeders begrænsninger, og de bør have indsigt i, at kendskab til de elementære funktionernes egenskaber er afgørende for at kunne forklare det grafiske forløb uden for ’billedet’.

I læreplanens afsnit 4.2 om prøveformer hedder det: ”Under den anden del af prøven må eksaminanden benytte alle hjælpemidler, bortset fra kommunikation med omverdenen. Opgaverne til denne del af prøven udarbejdes ud fra den forudsætning, at eksaminanden råder over CAS-værktøjer, der kan udføre symbolmanipulation, jf. afsnit 3.3”. Dette kræver, at CAS-værktøjet indgår som et naturligt hjælpemiddel i elevernes daglige arbejde med de skriftlige opgaver i matematik, således at de opøver rutiner i brugen af værktøjet, så de bliver i stand til på en hensigtsmæssig måde at anvende værktøjet ved løsning af de centralt stillede eksamensopgaver.

3.i Undervisningstilrettelæggelse med it

It bør ligesom i andre fag være en naturlig del af den daglige undervisning i matematik på lige fod med andre undervisningsmaterialer. I læreplanens afsnit 3.3 hedder det, at der: ”I tilrettelæggelsen indgår træning i at anvende disse hjælpemidler til at udføre beregninger, til symbolsk manipulation af formeludtryk, til håndtering af statistisk datamateriale, til at skaffe sig overblik over grafer, til ligningsløsning, til symbolsk differentiation og integration samt til løsning af differentilligninger. Endvidere indgår anvendelse af lommeregner, it og matematikprogrammer i tilrettelæggelsen af den eksperimenterende tilgang til emner og problemløsning”.

It skal anvendes, fordi it kan være med til at kvalificere undervisningen og støtte eleverne i, at:

- Forstå matematiske ræsonnementer og beviser, og i at danne matematiske begreber gennem fastholdelse af fokus på det væsentlige. Ved udledning af differentialkvotienter kan der sættes fokus på tretrinsreglen, når værktøjet kan udføre reduktioner. Animationer af sekanternes vandring mod tangenten kan støtte begrebstilegnelsen. Ved udledning af cosinusrelationerne kan der sættes fokus på, hvorledes vi bygger oven på en viden om retvinklede trekanter, samt opstillingen af de to ligninger, og man kan undgå at indsigten heri hæmmes af en vanskelig reduktion.
- Udvikle matematiske færdigheder, fx i forbindelse med faktorisering, reduktion og ligningsløsning, idet værktøjet kan give umiddelbar respons på resultater og omskrivninger. Man kan samtidig med større frihed træne i at indføre variable og opstille ligninger, da værktøjet kan håndtere flere ligninger med flere ubekendte.
- Benytte en eksperimentel tilgang til begreber og problemer, herunder at opstille hypoteser og afprøve disse. Foruden det tidligere nævnte under eksperimentelle forløb, gælder dette også i mange mindre delundersøgelser som fx undersøgelse af, hvilken betydning koefficienterne i et 2. gradspolynomium eller konstanterne i de elementære funktioners regneforskrifter har for grafernes udseende. Tilsvarende kan gennemføres en eksperimenterende undersøgelse af, hvilken betydning de enkelte parametre som rente, afdragstid mv. har for en bestemt økonomisk problemstilling.
- Opstille og udforske matematiske modeller, både gennem beregninger og grafiske fremstillinger af et datamateriale. Det kan være et modelleringsarbejde i samarbejde med andre fag, som omtalt andetsteds. Eller det kan være optimeringsproblemer, hvor CAS-værktøjets muligheder for at stille ”hvad-nu-hvis”-spørgsmål udnyttes, som i følgende undersøgelse af, hvor meget en bil ”fylder” på en vej: Bilen er 4 meter lang, kører med en fart på v m/s, førerens reaktionstid er 1,0 s og bremselængden er $0,07 \cdot v^2$, dvs. målt i meter ”fylder” bilen - hvis man holder den korrekte afstand - stykket: $4 + 1 \cdot v + 0,07 \cdot v^2$. Altså kan der på vejen passere: $f(v) = \frac{v}{4 + 1 \cdot v + 0,07 \cdot v^2}$ biler pr. sekund. Med CAS-værktøjet findes let den hastighed v , der giver det maksimale antal biler pr. sekund på vejen. Derefter kan man stille spørgsmål af typen: Hvad nu hvis? Dvs. nu kan man eksperimentere. Man kan prøve med en søvrig bilist ved at rette 1 sekund til 2 sekunder. Man kan variere på vejens friktion. En mere glat vej svarer et tal, der mindre end 0,07. Derved finder man hurtigt ud af, hvad vejens kapacitet afhænger af.
- Udforske sandsynlighedsteoretiske modeller og statistiske test som beskrevet i afsnit 2. (se afsnit 2b: [Statistik og sandsynlighedsregning](#)).
- Kvalificere deres skriftlige arbejde ved at inddrage mulighederne for elektronisk kommunikation om skriftlige opgaver og for at give eleverne feedback undervejs i arbejdet med et skriftligt produkt. En egentlig procesretning kan også udnytte it-faciliteternes muligheder.
- Kommunike om matematik. Ved inddragelse af it-værktøjer i undersøgelsen af forskellige problemer kan man stimulere elevernes behov for at diskutere resultater, hvad det er de ser osv., samtidig med at it kan anvendes af elevernes i deres præsentation af deres besvarelser af givne problemstillinger.

På [fagets side på emu'en](#) er der placeret en række yderligere materialer til inspiration.

3.j Samspil med andre fag

I læreplanens afsnit 1.1 hedder det: ”Matematik bygger på abstraktion og logisk tænkning og omfatter en lang række metoder til modellering og problembehandling. Matematik er uundværlig i mange erhverv, i naturvidenskab og teknologi, i medicin og økologi, i økonomi og samfundsvidenskab, og som grundlag for politisk beslutningstagen”. I læreplanens afsnit 3.4 om samarbejde med andre fag siges videre: ”Når matematik indgår i en studieretning, skal der tilrettelægges et fagligt samarbejde, som indeholder mere omfattende anvendelse af matematik. Herved skal eleven opnå en dybere indsigt i matematikkens beskrivelseskraft og i vigtigheden af at overveje og diskutere forudsætninger for en matematisk beskrivelse og pålidelighed af de resultater, der opnås gennem beskrivelsen”.

Andre fag som fysik, kemi, biologi, naturgeografi og samfundsfag anvender matematik til problemløsning og formulerer ofte hypoteser og teorier i matematikkens sprog. Matematik selv ”har udviklet sig i en stadig vekselvirkning mellem anvendelser og opbygning af teori”, hedder det i læreplanens afsnit 1.1. Problemstillinger fra andre fag udfordrer og stimulerer matematik til at finde metoder til at løse problemerne. Samtidig er sådanne problemer med til at vise betydningen af at beherske den abstrakte matematiske teori, og alle de forskellige eksempler er med til at gøre undervisningen mere levende og vedkommende for eleverne.

Et samarbejde med andre fag kan således bidrage til, at eleverne kan ”demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder, herunder viden om anvendelse i behandling af en mere kompleks problemstilling”, som det hedder i læreplanens afsnit 2.1.

I læreplanens afsnit 1.1 hedder det: ”Matematik har ledsaget kulturens udvikling fra de tidligste civilisationer og menneskenes første overvejelser om tal og form”. I læreplanens afsnit 3.4 om samarbejde med andre fag siges videre: ”Der skal tilrettelægges undervisningsforløb med det hovedsigte at udvikle elevernes kendskab til matematikkens vekselvirkning med kultur, videnskab og teknologi. Dette skal ske gennem et samarbejde med andre fagområder eller ved at inddrage elevernes kendskab til disse fagområder”.

Det grundlag for matematisk teori og ræsonnement som blev udformet i oldtidens Grækenland, har øvet betydelig indflydelse på den vestlige verdens tænkning og har påvirket talrige store filosoffer og kirkefædre, samfundsteoretikere og politiske tænkere. Samtidig har matematikkens evne til at løse praktiske problemer givet afgørende bidrag til samfundsudviklingen, ligesom nye behov bestandig har stillet nye opgaver til matematikken.

I almen studieforberedelse kan matematik deltage i en bred vifte af emneforløb og omvendt vil et sådant fagligt samarbejde kunne bidrage til at eleverne kan ”demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske, videnskabelige og kulturelle udvikling”, som det hedder i læreplanens afsnit 2.1.

I grundforløbet kan der eksempelvis

- i et samarbejde med naturvidenskabeligt grundforløb, med naturvidenskabelige fag eller med idræt gennemføres kortere eller længere forløb over vækstmodeller (se [Eksempel 201](#))
- i et samarbejde fysik gennemføres et forløb over afkøling og eksponentielle modeller
- i et samarbejde med samfundsfag C gennemføres et forløb med anvendelse af statistiske metoder eksempelvis til undersøgelse af kriminalitet
- i et samarbejde med biologi gennemføres et forløb om nedbrydning af rusmidler.

I vejledningen til matematik C-niveau og [på fagets side på emu'en](#) er der placeret en række yderligere materialer til inspiration.

I en studieretning med matematik og samfundsfag kan der eksempelvis gennemføres forløb om

- opinionsmålinger (se [Eksempel 220](#)), statistiske metoder og indsamling af data via spørgeskemaer eller på anden vis
- stikprøver ud fra store databaser (se [Eksempel 221](#)), overvejelser om kvaliteten af sådanne stikprøver, opstilling af hypoteser og statistisk afprøvning af sådanne
- makroøkonomiske modeller (se [Eksempel 223](#)) og vismandsspillet
- velfærdsmodeller
- LP-modeller
- profitmaksimering i enkeltvirksomheder

I vejledningen til matematik B-niveau og [på fagets side på emu'en](#) er der placeret en række yderligere materialer til inspiration.

I en studieretning med matematik og biologi kan der eksempelvis gennemføres forløb om

- arvelighed (se [Eksempel 210](#)), betingede sandsynligheder og Hardy-Weinbergs lov
- retsgenetik og analyse af dna-sekvenser (se [Eksempel 211](#)), hvor matematik anvender Bayes sætning og avancerede it-værktøjer anvendes i analysen af dna
- epidemier og immunbiologi
- vækstmodeller (se [Eksempel 201](#))
- økologiske problemstillinger
- dig og din puls, hvor idræt naturligt kunne inddrages
- fedme og kolesterol
- fiskerimodeller
- diabetes 2-modellen
- at smage eller føle forskel

I vejledningen til matematik B- og C-niveau og [på fagets side på emu'en](#) er der placeret en række yderligere materialer til inspiration.

I en studieretning med matematik og fysik kan der eksempelvis gennemføres forløb om

- radioaktivt henfald (se [Eksempel 230](#)) både af et første led i kæden og dobbelt radioaktivt henfald
- kinematik (se [Eksempel 223](#)), eksempelvis med projekter fra det naturvidenskabelige gennembrud i 16-1700-tallet
- svingninger
- frit fald og udspring med faldskærm (se [Eksempel 231](#))
- varmeledning
- kasteparabler
- afkøling
- rejsen til Månen

I vejledningen til matematik B-niveau og [på fagets side på emu'en](#) er der placeret en række yderligere materialer til inspiration.

I en studieretning med matematik og kemi kan der eksempelvis gennemføres forløb om

- pH
- algebraisk afstemning af reaktionsskemaer og løsning af lineære ligningssystemer

– 2. ordens reaktioner – løsning af differentiallyigninger med brug af CAS-værktøjer
I vejledningen til matematik B-niveau og [på fagets side på emu'en](#) er der placeret en række yderligere materialer til inspiration.

I en studieretning med matematik og musik kan der eksempelvis gennemføres forløb om

- toneskalaer, fra den pythagoræiske over middelalderskalaer til den veltempererede
- lydbølger
- fourieranalyse af lyd (se [Eksempel 250](#))

I vejledningen til matematik B-niveau og [på fagets side på emu'en](#) er der placeret en række yderligere materialer til inspiration.

I en studieretning med matematik og naturgeografi kan der eksempelvis gennemføres forløb om

- landmåling, opmåling af Jorden og korttegning gennem tiderne
- Jordens alder
- modellering af jordskælv (se [Eksempel 260](#))

I vejledningen til matematik B- og C-niveau og [på fagets side på emu'en](#) er der placeret en række yderligere materialer til inspiration.

I almen studieforbereelse kan matematik eksempelvis medvirke i et forløb om

- argumentets rolle i den vestlige kultur og arven fra Euklid (se [Eksempel 304](#))
- forestillinger om rummet med udgangspunkt i Abbot Abbots 'Flatland' (se [Eksempel 270](#)), Lewis Carrolls bøger, filosoffer som Kant og matematikere som Gauss.
- billedanalyse og det gyldne snit
- Newton og hans tid
- kryptering og dekryptering med inddragelse af dechifrerings af uddøde sprog
- A Beautiful Mind – en forløb om logik
- risikovurderinger i det moderne samfund (se [Eksempel 273](#)) – Three Mile Island og Challenger.
- formidling af statistiske undersøgelser, med udgangspunkt i konkret eksempler.
- opdagelsesrejser og navigation
- tunnellen på Samos
- det moderne verdensbillede
- sundhed og livsstil
- afsløring af kunstfalsknerier
- værdiperspektiv og centralperspektiv (se [Eksempel 305](#))
- de store epidemier

I vejledningen til almen studieforbereelse og [på fagets side på emu'en](#) er der placeret en række yderligere materialer til inspiration.

4. Evaluering

4.a Løbende evaluering

I afsnit 4.1 af læreplanen hedder det: ”*Både undervisningen og elevernes faglige udbytte heraf evalueres løbende.*” Sigtet med den løbende evaluering er altså dobbelt. Dels skal den vejlede den enkelte elev i det videre arbejde med faget, dels skal den afdække om undervisningens tilrettelæggelse er optimal med hensyn til elevernes udbytte.

Den løbende evaluering af det mundtlige arbejde indeholder en vurdering af elevernes bidrag til undervisningen i klassediskussionerne samt en vurdering af deres selvstændige fremlæggelse. Mundtlig evaluering kan også foregå ved samtaler med eleverne, når de sidder gruppevis og arbejder selvstændigt. Her kan man få et godt indtryk af deres faglige niveau og deres formidlingsevne.

Den løbende evaluering af det skriftlige arbejde vedrører både eksamenslignende prøver og små test, skriftlige opgaver og større rapporter. I læreplanens afsnit 4.1 hedder det: ”Gennem hele gymnasieforløbet arbejdes med løsning af skriftlige opgaver, og eleverne afleverer jævnligt skriftlige besvarelser. Besvarelserne rettes og kommenteres på grundlag af bedømmelseskriterierne i afsnit 4.3.” Det løbende arbejde med at rette og kommentere de skriftlige opgaver er kommenteret i hovedafsnit 3 under overskriften **Rapporter og skriftligt arbejde**, hvortil der henvises.

I læreplanens afsnit 4.1 hedder det videre: ”For hvert større projekt- eller emneforløb skal det tydeligt fremgå, hvorledes elevernes udbytte af forløbet evalueres. Forløb over større emner inden for kernestoffet afrundes normalt med en test til evaluering af de faglige delmål.”

Målene opstilles på baggrund af gymnasiets samlede målsætning og den faglige målbeskrivelse i læreplanens afsnit 2.1. I nogle forløb vil dette naturligt ske i et samarbejde med klassens øvrige lærere. Det er nødvendigt at indtænke faglig progression i de opstillede mål, idet læreplanens målbeskrivelser er slutmål, som skal være opnået ved undervisningens afslutning. Endelig indtænkes hvilke dele af kernestoffet og det supplerende stof, der indgår i forløbet.

Ethvert større undervisningsforløb afsluttes med en test af elevernes udbytte. En test er ikke nødvendigvis identisk med en traditionel skriftlig prøve. Det kan også være et spørgeskema med korte faglige spørgsmål og andre spørgsmål om elevernes arbejde i forløbet. En sådan test kan sammenknyttes med evaluering af selve undervisningsforløbet. Testen kan også være mundtlig, hvis der er tale om et projektforsløb, hvor hver projektgruppe fremlægger resultatet af deres arbejde.

I læreplanen hedder det endelig: ”Efter hvert større projekt- eller emneforløb gennemfører lærer og elever en evaluering af undervisning, arbejdsformer og fremskridt på vej mod opfyldelsen af de faglige mål.” Selve undervisningen skal således også være genstand for evaluering, så man som lærer hele tiden overvejer, om man nu kunne tilrettelægge undervisningen med større udbytte for eleverne. Evaluering af undervisningen vil indgå i skolens evalueringsplan. Det er helt naturligt at inddrage eleverne i denne evaluering. Det kan ske på mange måder:

- Ved en åben debat i klassen ud fra en dagsorden med særlige temaer.
- Ved et anonymt spørgeskema, der efterbehandles af læreren og evt. diskuteres i klassen.
- Ved samtale med eleverne gruppevis, mens de fx har gruppearbejde.
- Individuelle udviklingssamtaler med hver elev. Her kan flere fag inddrages og samtalerne kan foruden de enkelte fag også omfatte mere generelle emner såsom studieteknik mv.

4.b Den skriftlige prøve

I læreplanens afsnit 4.2 hedder det: ”Til den skriftlige prøve gives der 5 timer. Det skriftlige eksamenssæt består af opgaver stillet inden for kernestoffet og skal evaluere de tilsvarende faglige mål, beskrevet i afsnit 2.1. Den første del af sættet skal besvares uden hjælpemidler. Til denne del af prøven gives der 1 time, hvorefter besvarelsen afleveres. Under den anden del af prøven må

eksaminanden benytte alle hjælpemidler, bortset fra kommunikation med omverdenen. Opgaverne til denne del af prøven udarbejdes ud fra den forudsætning, at eksaminanden råder over CAS-værktøjer, der kan udføre symbolmanipulation, jf. afsnit 3.3.”

4.c Formulering af opgaverne

Ved beregninger af enhver art arbejdes der indenfor mængden af reelle tal eller delmængder heraf. Komplekse tal vil derfor aldrig høre med til en ønsket løsningsmængde.

I en opgavetekst vil det ofte forekomme, at grundmængden for en ligning ikke direkte er nævnt. Det er da altid underforstået, at grundmængden skal vælges så omfattende som muligt inden for de reelle tal.

Ligeledes vil det ofte forekomme, at definitionsområdet for en given reel funktion ikke udtrykkeligt er angivet i opgaveteksten. I sådanne tilfælde er det altid underforstået, at definitionsområdet er den mest omfattende delmængde af de reelle tal, inden for hvilken den angivne forskrift har mening. En modelsituation kan lægge begrænsninger på variationen af de variable ud over de rent matematiske begrænsninger. Er dette ikke eksplicit angivet i opgaveformuleringen, er det en del af besvarelsen at redegøre for, hvilke intervaller der arbejdes indenfor.

Brug af ord som 'skitse' og 'tegn' er ikke udtryk for at der ønskes en bestemt fremgangsmåde. Det er en del af undervisningen, at eleverne opnår indsigt i, hvilke detaljer der bør medtages i en skitse eller modeltegning. En skitse af et grafisk forløb eller en modeltegning af en geometrisk situation skal vise de karakteristiske egenskaber eller fænomener, som er væsentlig for opgavens besvarelse. Eksempelvis tegnes spidse vinkler som spidse og modeller af trekantede tegnes ikke som retvinklede, hvis dette ikke fremgår. For et grafisk forløb kan skæringspunkter med akserne, beliggenhed af lokale ekstrema, monotoniforhold eller asymptotisk forløb hver for sig være væsentlige at tage med i en skitse, alt afhængig af opgaven.

Brug af formuleringer som 'løs ligningen', 'bestem nulpunkter' eller 'beregnet skæringspunkter mellem to grafer' er ikke udtryk for, at der ønskes en bestemt fremgangsmåde. Det er en del af undervisningen, at eleverne opnår indsigt i styrke og svagheder ved symbolske kontra numeriske metoder til at løse ligninger og andre matematiske problemer. Dette vil sætte eleverne i stand til at vurdere hensigtsmæssigheden i en given løsningsmetode, samt at finde andre veje frem, hvis en bestemt løsningsstrategi slår fejl. I opgaver, hvor der ønskes en begrundelse for antallet af løsninger eller for at den samlede løsningsmængde er bestemt, vil dette fremgå af opgaveteksten.

I opgaver, hvor der skal argumenteres for at den samlede løsningsmængde er bestemt, eller hvor der skal bestemmes lokale ekstrema, vil der ofte være forskellige veje til målet, og der foreskrives ikke nogen bestemt metode. Det er en del af undervisningen, at eleverne opnår indsigt i dette, herunder hvorledes man kan argumentere ved hjælp af $f'(x)$.

I opgaver inden for integralregning vil det altid fremgå af opgaveteksten, hvis man ønsker angivelse af en stamfunktion eller et ubestemt integral. Når ubestemte integraler bestemmes ved hjælp af et CAS-værktøj, forventes det ikke, at eleverne kan omskrive et svar, hvori der indgår funktioner, som ikke er en del af kernestoffet.

I delprøven med hjælpemidler kan der i modelsituationer optræde funktionsudtryk, som ikke direkte er nævnt i kernestoffet. Sådanne udtryk forventes eksaminanderne at kunne differentiere og integrere med brug af et CAS-værktøj, jfr. vejledningens afsnit 2d. Derimod gælder det, at i alle opgaver, hvor der skal løses en differentiaalligning, vil denne kunne omskrives til en af de typer, der er omtalt under kernestoffet. Eksaminanderne må naturligvis gerne løse en sådan differentiaalligning med brug af et CAS-værktøj.

I en modelopgave kan eksaminanderne få et datamateriale for sammenhængen mellem variable samt oplysninger om, hvilken matematisk modeltype der kan beskrive materialet. Eksaminanderne skal kunne opstille og håndtere denne model, herunder stille spørgsmål til og besvare spørgsmål vedrørende modellen, men de forventes ikke ved den skriftlige eksamen at kunne begrunde én bestemt model frem for andre. Det forventes, at eksaminanderne kan udføre lineær, eksponentiel og potensregression.

Matematisk notation og matematiske symboler vil i alle tilfælde, hvor der ikke foreligger entydige internationale regler, blive anvendt ud fra det sigte at gøre opgaveteksten læsevenlig for eksaminanden. I prøven uden hjælpemidler vil funktionsudtryk som $\sqrt[n]{x^b}$ altid være omskrevet på formen x^a .

Ligesom e^{kx} , a^x , $\frac{1}{x}$ og \sqrt{x} både kan betegne funktionen og en funktionsværdi, således kan det også generelt forekomme, at symbolet $f(x)$ anvendes til både at betegne en funktion og en funktionsværdi.

Konteksten vil afgøre, om det er hensigtsmæssigt eller ej at anvende parenteser i udtryk som $\ln(x)$ og $\ln x$ osv. Kan det misforstås, vil man altid sætte parenteser, som i $\ln(a \cdot b)$.

Inden for analytisk geometri og vektorregning er det ofte hensigtsmæssigt at identificere en vektor med vektorens koordinater: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Den samme form for identifikation vil også blive anvendt ved beskrivelse af punkter. Man kan her både møde formuleringer som: punktet $P(2,3)$, punktet $(2,3)$ og $P = (2,3)$. Den samme notation vil blive anvendt ved beskrivelse af punkter på en graf.

Der anvendes som standard dansk komma: 1,53 og ikke 1.53. Ved angivelse af koordinater kan der dog blive anvendt decimalpunktum, hvis det danske komma kan give anledning til misforståelser. Vi vil tillade os at skrive: $(1.5, 4)$ i stedet for $(1,5, 4)$. Hvis et udklip benytter decimalpunktum, vil denne notation ikke blive ændret i gengivelsen.

4.d Eksamenssættets udformning

Delprøven med hjælpemidler kan indeholde valgfrie opgaver. Er dette tilfældet vil det tydeligt fremgå af sættet, hvor mange af de valgfrie opgaver der må afleveres til bedømmelse.

Til eksaminandernes orientering vil det i eksamenssættet være anført, hvilken pointfordeling der lægges til grund for vurderingen af besvarelsen. En fuldstændig besvarelse giver 125 point, hvoraf de 25 henhører til prøven uden hjælpemidler. Et antal point, maksimalt 10 % af det samlede pointtal reserveres til en bedømmelse af helhedsindtrykket af opgavebesvarelsen.

Ifølge læreplanen består eksamenssættet ”af opgaver stillet inden for kernestoffet og som skal evaluere de tilsvarende faglige mål beskrevet i afsnit 2.1”. I hovedafsnit 2 i denne undervisningsvejledning er der i hovedtræk redegjort nærmere for, hvad dette betyder for opgaverne til prøven med hjælpemidler.

4.e Prøven uden hjælpemidler

Det forventes, at eleverne kan

- opstille enkle formler ud fra en sproglig beskrivelse
- anvende nulreglen og løse simple første og 2. gradsligninger
- anvende kvadratsætningerne og reducere udtryk
- sætte tal ind i forskrifter
- anvende Pythagoras læresætning
- foretage beregninger i ensvinklede trekkanter
- håndtere eksponentiel notation og anvende potensreglerne
- isolere ukendte størrelser, herunder anvende logaritmer og rødder
- redegøre for andengradspolynomiers grafer
- bestemme regneforskrifter for lineære, eksponentielle og potensfunktioner
- differentiere polynomier, potensfunktioner, e^{kx} og $\ln(x)$
- anvende de regneregler for differentiation, som er beskrevet i kernestoffet
- bestemme en tangentligning
- anvende viden om sammenhængen mellem afledet funktion og monotoniforhold
- aflæse væksthastighed grafisk
- bestemme integraler af polynomier, potensfunktioner, e^{kx} samt funktionen $\frac{1}{x}$
- anvende viden om sammenhængen mellem stamfunktion, bestemt integral og areal.
- anvende de regneregler for integration, som er beskrevet i kernestoffet
- redegøre for om en given funktion er en løsning til en differentiaalligning
- opstille parameterfremstillinger for linjer i plan og rum og opstille ligninger for planer
- omskrive cirkel- og kugleligninger med henblik på at bestemme centrum og radius
- bestemme skæringspunkter med linjer både i planen og i rummet
- anvende reglerne for vektorregning
- bestemme afstand fra punkt til linje i planen og fra punkt til plan i rummet
- anvende vektorielle værktøjer til at svare på spørgsmål om ortogonalitet, parallelitet, areal og projektion.

4.f Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

For det skriftlige eksamenssæt gælder, at der i bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil blive langt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart, herunder om der i opgavebesvarelsen er:

- en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på
- en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik
- en dokumentation af et passende antal mellemregninger
- en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde, herunder den eventuelle brug af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder
- en brug af figurer og illustrationer
- en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer

- en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes og som ikke kan henføres til standardviden
- en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og med brug af almindelig matematisk notation.

4.g Den mundtlige prøve

For hvert hold på skolen træffes et valg mellem to prøveformer:

”Prøveform a): En mundtlig prøve på grundlag af et overordnet spørgsmål med konkrete delspørgsmål. Spørgsmålene til prøven er offentliggjort i god tid inden prøven og er udformet således, at de tilsammen gør det muligt at evaluere de faglige mål, der er beskrevet i afsnit 2.1. Spørgsmålene og en fortegnelse over undervisningsforløb sendes til censor, og censor godkender spørgsmålene forud for prøvens afholdelse.”

Grundlaget for den mundtlige prøve er de gennemførte undervisningsforløb. I god tid inden eksamen vurderer læreren i samråd med holdet, om der blandt alle de gennemførte undervisningsforløb er nogle kortere forløb eller delforløb, som er mindre velegnede i en mundtlig prøvesammenhæng, og som dermed udskydes af det samlede prøvegrundlag. Prøvegrundlaget skal både dække kernestoffet, det supplerende stof og de faglige mål. Det kan eksempelvis dreje sig om et indledende forløb om formler og ligninger, som ikke er velegnet som selvstændigt emne, i den form forløbet havde. Forløbet er indholdsmæssigt dækket af andre forløb og udskydes derfor af prøvegrundlaget. Det kan også dreje sig om et forløb inden for statistik eller om et historisk emne, som udviklede sig til et mindre vellykket forløb. Klassen beslutter derfor at gennemføre et andet forløb, der dækker samme faglige mål, henholdsvis supplerende stof, som det mindre vellykkede skulle have gjort. Dette udskydes derfor af eksamensgrundlaget. (Jfr. § 120 stk. 2 i stx bekendtgørelsen om fastlæggelsen af rammerne for undervisningsbeskrivelserne).

Den enkelte lærer finder sin egen måde ”at holde regnskab med”, hvorledes de faglige mål, det supplerende stof og de forskellige aktiviteter omtalt i kapitel 3 dækkes. I kapitel 5 er lagt et værktøj, der måske kan udnyttes i den planlægning (se [Eksempel 400](#)). Listen over de undervisningsforløb, som udgør prøvegrundlaget, behøver ikke være den samme for alle elever. For et A-niveau-hold, der ikke er med i studieretning, vil det næsten altid være tilfældet, at der er forskelle mellem elevernes undervisningsforløb.

Eksamensspørgsmålene tager udgangspunkt i gennemførte undervisningsforløb. Det enkelte eksamensspørgsmål skal gøre det muligt at evaluere eksaminandens beherskelse af dele af de faglige mål og være udformet således, at eksaminationen kan bringe en række af bedømmelseskriterierne i spil. Samlet set skal eksamensspørgsmålene dække de faglige mål formuleret i læreplanens afsnit 2.1.

Eksamensspørgsmålene skal offentliggøres i god tid inden eksamen. Det er mest hensigtsmæssigt, at offentliggørelsen indgår som en del af lærerens plan for undervisningen. Nogle lærere vil foretrække at offentliggøre spørgsmålene i forbindelse med de enkelte forløb, som spørgsmålene knytter sig til. Andre vil foretrække at offentliggøre spørgsmålene samlet i forbindelse med repetitionen.

Uanset hvordan man griber det an, bør der i forbindelse med offentliggørelsen sættes tid af til at drøfte udformningen af spørgsmålene. Et af formålene med offentliggørelsen er at gøre eleverne klar over forholdet mellem overskrift og underspørgsmål. Endvidere at de er klar over, hvad der helt præcist menes med formuleringen af de enkelte underspørgsmål. Endelig hvad der forventes af en god mundtlig præstation.

Hvis holdet skal til mundtlig prøve placeres udkast til eksamensspørgsmål efter skolens anvisninger på hjemmesiden sammen med beskrivelsen af undervisningsforløbene. For et A-niveau-hold, der

ikke indgår i en studieretning, kan bestemte eksamensspørgsmål have én fælles overskrift, men forskelligt udformede undertekster, der hver peger i retning af de forskellige undervisningsforløb, eleverne har arbejdet med. Spørgsmål og en fortegnelse over undervisningsforløbene sendes til censor. Det er god praksis, at censor af hensyn til eksaminandernes forberedelse senest 7 dage før prøvens afholdelse godkender spørgsmålene.

”Prøveform b): En mundtlig prøve på grundlag af rapporter udarbejdet i tilknytning til undervisningen. Den enkelte eksaminands rapporter skal som helhed dække de faglige mål, der er beskrevet i afsnit 2.1. Eksamensspørgsmålene udformes med en overskrift og konkrete delspørgsmål i relation til rapporterne. Spørgsmålene og en fortegnelse over rapporter og undervisningsforløb sendes til censor, og censor godkender spørgsmålene forud for prøvens afholdelse.”

Grundlaget for den mundtlige prøve er de gennemførte undervisningsforløb, herunder projektførløbene. I god tid inden eksamen vurderer læreren i samråd med holdet, om der blandt alle de gennemførte projektførløb og emneforløb er nogle kortere forløb eller delførløb, som er mindre velegnede i en mundtlig prøvesammenhæng, og som dermed udskydes af det samlede prøvegrundlag. Prøvegrundlaget skal både dække kernestoffet, det supplerende stof og de faglige mål. Det kan eksempelvis dreje sig om et indledende forløb om formler og ligninger, som ikke er velegnet som selvstændigt emne, i den form forløbet havde. Forløbet er indholdsmæssigt dækket af andre forløb og udskydes derfor af prøvegrundlaget. Det kan også dreje sig om et forløb inden for statistik eller om et historisk emne, som udviklede sig til et mindre vellykket forløb. Klassen beslutter derfor at gennemføre et andet forløb, der dækker samme faglige mål, henholdsvis supplerende stof, som det mindre vellykkede skulle have gjort. Dette udskydes derfor af eksamensgrundlaget. (Jfr. § 120 stk. 2 i stx bekendtgørelsen om fastlæggelsen af rammerne for undervisningsbeskrivelserne).

Den enkelte lærer finder sin egen måde ”at holde regnskab med”, hvorledes de faglige mål, det supplerende stof og de forskellige aktiviteter omtalt i kapitel 3 dækkes. I kapitel 5 er lagt et værktøj, der måske kan udnyttes i den planlægning (se [Eksempel 400](#)). Listen over de projektførløb og emneforløb, som udgør prøvegrundlaget, behøver ikke være den samme for alle elever. For et A-niveau-hold, der ikke er med i studieretning, vil det næsten altid være tilfældet, at der er forskelle mellem elevernes forløb.

Eksamensspørgsmålene tager udgangspunkt i projektførløb og emneforløb. For hvert projekt foreligger en projektformulering, der rummer en sådan faglig bredde og dybde, at en eksamination med udgangspunkt heri gør det muligt at evaluere eksaminandens beherskelse af dele af de faglige mål og at bringe en række af bedømmelseskriterierne i spil. Samlet set skal eksamensspørgsmålene dække de faglige mål formuleret i læreplanens afsnit 2.1.

Eksamensspørgsmålene skal offentliggøres i god tid inden eksamen. Det er mest hensigtsmæssigt, at offentliggørelsen indgår som en del af lærerens plan for undervisningen. Nogle lærere vil foretrække at offentliggøre spørgsmålene i forbindelse med de enkelte forløb, som spørgsmålene knytter sig til. Andre vil foretrække at offentliggøre spørgsmålene samlet i forbindelse med repetitionen.

Uanset hvordan man griber det an, bør der i forbindelse med offentliggørelsen sættes tid af til at drøfte udformningen af spørgsmålene. Et af formålene med offentliggørelsen er at gøre eleverne klar over forholdet mellem overskrift og underspørgsmål. Endvidere at de er klar over, hvad der helt præcist menes med formuleringen af de enkelte underspørgsmål. Endelig hvad der forventes af en god mundtlig præstation.

Hvis holdet skal til mundtlig prøve placeres udkast til eksamensspørgsmål efter skolens anvisninger på hjemmesiden sammen med beskrivelsen af projektformuleringerne. For et A-niveau-hold, der ikke indgår i en studieretning, kan bestemte eksamensspørgsmål have én fælles overskrift, men

forskelligt udformede undertekster, der hver peger i retning af de forskellige projektformuleringer, eleverne har arbejdet med. Spørgsmål og en fortegnelse over projektførløbene sendes til censor. Det er god praksis, at censor af hensyn til eksaminandernes forberedelse senest 7 dage før prøvens afholdelse godkender spørgsmålene / prøvegrundlaget.

I læreplanens afsnit 4.2 hedder det videre: *”Eksaminationstiden er 30 minutter pr eksaminand. Der gives 30 minutters forberedelsestid.*

Prøven er todelt.

Første del af prøven består af eksaminandens præsentation af sit svar på det udtrukne spørgsmål, henholdsvis præsentation af den udtrukne rapport og dennes faglige delmål, suppleret med uddybende spørgsmål fra eksaminator.

Anden del former sig som en samtale mellem eksaminand og eksaminator med udgangspunkt i det overordnede spørgsmål, henholdsvis rapportens genstandsfelt.”

Endelig hedder det i læreplanen vedrørende prøveform (b), at der *”alene tages hensyn til den mundtlige præstation”*.

Der skal være så mange spørgsmål, at sidste eksaminand har mindst 4 spørgsmål at vælge mellem. Der må gerne være dubletter. Alle spørgsmål skal være lagt frem ved eksaminationens start.

Uanset prøveform skal det enkelte eksamensspørgsmål være så præcist formuleret, at der ikke kan være tvivl om, hvilket stofområde der vil blive eksamineret i. Udtryk som ”du kan evt. komme ind på...”, eller ”hvis der bliver tid ...” skal undgås.

Eksamensspørgsmålene må hverken indeholde en disposition for eksaminationens forløb, eller stikord til samtaledelen.

Uanset prøveform opbygges eksamensspørgsmålet todelt med en forholdsvis kort overskrift og en uddybende undertekst med et eller flere konkrete delspørgsmål. De(t) konkrete spørgsmål er det stof, eksaminanden selv skal komme med et oplæg om. Samtaledelen bevæger sig inden for de rammer som overskriften udstikker.

Der er ingen fast regel for, hvor længe hver af de to faser i eksaminationen skal være, men normalt bør der afsættes godt halvdelen af eksamenstiden til første del.

Såfremt en eksaminand har udarbejdet en rapport i papir eller elektronisk format om eksamensspørgsmålets genstandsfelt, er det naturligt, at eksaminanden inddrager rapporten i sin besvarelse af eksamensspørgsmålet. Er der anvendt bestemte geometriske, statistiske eller andre værktøjsprogrammer kan dette også indgå ved eksaminationen. Dog er det afgørende, at det er de matematiske færdigheder og ikke en teknisk formåen, der kommer til at stå i centrum for eksaminationen.

Eksaminator leder eksaminationen, men det er vigtigst, at eksaminanden får mulighed for en selvstændig fremlæggelse og ikke for hurtigt afbrydes. Det er ligeledes vigtigt, at forskellen mellem første og anden del af eksamen træder klart frem, således at første del ikke for hurtigt bliver til en samtaledel.

Samtalen kan tage udgangspunkt i nogle elementer fra første del og give eksaminanden mulighed for at demonstrere kendskab til anvendelser af noget teori, at inddrage et historisk perspektiv eller at

vide overblik over det faglige område. I samtaledelen kan man ikke afkræve eksaminanden bevistunge eller meget detaljerede redegørelser.

Under hele eksaminationen er det eksaminators opgave at sikre, at såvel fortrin som mangler ved eksaminandens præstation træder tydeligt frem. Fejl og faglige misforståelser kan give anledning til opklarende spørgsmål, men dette må ikke udvikle sig til undervisning.

Eksaminanderne må have alle hjælpemidler, lærebøger, notater, rapporter, dispositioner til spørgsmålene mv. med både til forberedelsen og i selve eksamenslokalet. Eksaminanderne skal ikke bruge forberedelsestiden på at skrive en eventuel disposition de har lavet hjemmefra over på et andet stykke papir, men på at forberede sig på det spørgsmål, de har trukket.

Under selve eksaminationen må eksaminanden støtte sig til notater eller henvise til en rapport, men skal før prøvens afholdelse være gjort opmærksom på, at oplæsning eller afskrift af sådanne notater ikke tæller positivt med i bedømmelsen.

4.h Bedømmelseskriterier og karaktergivning

I læreplanens afsnit 4.3 er opridset de bedømmelseskriterier, der lægges til grund for bedømmelsen af såvel skriftlige som mundtlige præstationer. Det vil altid afhænge af det faglige stof, eller det konkrete eksamensspørgsmål, hvilke af de omtalte kriterier der naturligt er i spil i den givne situation:

”Bedømmelsen er en vurdering af, i hvilket omfang eksaminandens præstation lever op til de faglige mål, som er angivet i 2.1.

I denne vurdering lægges der vægt på, om eksaminanden:

1) har grundlæggende matematiske færdigheder, herunder

- kan håndtere matematisk symbolsprog og matematiske begreber*
- har kendskab til matematiske metoder og kan anvende dem korrekt*
- er i stand til at bruge it-værktøjer hensigtsmæssigt*

2) kan anvende matematik på foreliggende problemer, herunder

- kan vælge hensigtsmæssige metoder til løsning af forelagte problemer*
- kan præsentere et matematisk emne eller en fremgangsmåde ved løsning af et matematisk problem på en klar og overskuelig måde*
- kan redegøre for foreliggende matematiske modeller og diskutere deres rækkevidde*

3) har overblik over og kan perspektivere matematik, herunder

- kan perspektivere matematikkens udvikling*
- har overblik over et område, hvor matematik anvendes i samspil med andre fag, samt evner at reflektere over matematikkens rolle i anvendelser i andre fag*
- kan bevæge sig mellem fagets teoretiske og praktiske sider i forbindelse med modellering og problembehandling*
- demonstrerer indsigt i karakteristiske sider af matematisk ræsonnement.”*

I læreplanen hedder det endelig: *”I både den skriftlige og den mundtlige prøve gives der én karakter ud fra en helhedsbedømmelse”*

En præstation, der fuldt ud opfylder de relevante faglige mål, vurderes til ”fremragende”, jf. bekendtgørelse nr 448 af 18/05/2006 (Bekendtgørelse om karakterskala og anden bedømmelse).

Nedenfor er i skematisk form vist, hvorledes 7-trinsskalens terminologi kan knyttes sammen med de faglige mål for henholdsvis skriftlig og mundtlig matematik på A-niveau:

Stx A Skriftligt

I en eksamenssituation inddrages de kategorier, som er relevante for pågældende prøvesæt
Eksaminanden:

Kategori	12	7	02
Dybde/ Kompleksitet/ Ræsonnement	<ul style="list-style-type: none">- kan opstille og tolke modeller og reflektere over prognoser og rækkevidde.- vælger og anvender med stor sikkerhed hensigtsmæssige metoder til behandling af forelagte matematiske problemer.	<ul style="list-style-type: none">- demonstrerer viden om opstilling og tolkning af matematiske modeller.- demonstrerer viden om vigtige metoder til behandling af forelagte matematiske problemer.	<ul style="list-style-type: none">- demonstrerer elementært kendskab til simple matematiske modeller.- demonstrerer nogen kendskab til fremgangsmåder i behandlingen af simple matematiske problemer.
Sprog/ Terminologi/ Fremlæggelse	<ul style="list-style-type: none">- kan udforme en veldisponeret besvarelse med en sikker brug af figurer og symbolsprog, og hvor tankegangen fremgår klart	<ul style="list-style-type: none">- kan udforme en opgavebesvarelse med god sammenhæng inden for de enkelte spørgsmål og med en god brug af figurer og symbolsprog	<ul style="list-style-type: none">- kan anvende simple formler, men udformer en noget usammenhængende besvarelse med en beskeden inddragelse af figurer og en noget upræcis anvendelse af symboler.
Bredde/ Overblik/ Perspektiv	<ul style="list-style-type: none">- er i stand til at bruge it-værktøjer hensigtsmæssigt.- demonstrerer viden og færdigheder på stort set alle felter med kun uvæsentlige mangler	<ul style="list-style-type: none">- er i stand til at bruge it-værktøjer hensigtsmæssigt i de fleste sammenhænge.- demonstrerer viden om og gode færdigheder inden for adskillige felter	<ul style="list-style-type: none">- kan anvende it-værktøjer i løsning af simple opgavetyper.- demonstrerer elementær viden og elementære færdigheder inden for flere felter

Stx A Mundtligt

I en eksamenssituation inddrages de kategorier, som er relevante for pågældende eksamensspørgsmål

Eksaminanden:

Kategori	12	7	02
Dybde/ Kompleksitet/ Ræsonnement	<ul style="list-style-type: none">- kan bevæge sig mellem fagets teoretiske og praktiske sider i forbindelse med modellering og problembehandling.- kan forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidde af modeller.- demonstrerer indsigt i matematisk ræsonnement og teoribygning.	<ul style="list-style-type: none">- kan redegøre for karakteristiske træk ved foreliggende matematiske modeller og diskutere rækkevidde af disse.- kan præsentere de vigtigste trin i behandling af et foreliggende matematisk problem.- kan gennemføre hovedlinjerne i et matematisk ræsonnement	<ul style="list-style-type: none">- kan, med en del usikkerhed, indgå i en faglig dialog om simple matematiske modeller.- demonstrerer i en samtale kendskab til fremgangsmåden i behandlingen af et simpelt matematisk problem.- demonstrerer i en samtale kendskab til enkelte aspekter i et simpelt matematisk ræsonnement
Sprog/ Terminologi/ Fremlæggelse	<ul style="list-style-type: none">- kan fremlægge velstruktureret og udtrykke sig i et klart sprog med ubesværet anvendelse af matematisk terminologi.	<ul style="list-style-type: none">- kan fremlægge sammenhængende med et godt kendskab til matematisk terminologi	<ul style="list-style-type: none">- kan anvende simple matematiske formler, men fremlægger noget usammenhængende og mangler præcision i matematisk terminologi.
Bredde/ Overblik/ Perspektiv	<ul style="list-style-type: none">- demonstrerer overblik over et område af matematik eller viden om et område, hvor matematik anvendes i samspil med andre fag.	<ul style="list-style-type: none">- demonstrerer viden om et område af matematik, eller viden om simple anvendelser af matematik i samspil med andre fag.	<ul style="list-style-type: none">- demonstrerer i en samtale kendskab til et område af matematik eller til simple anvendelser af matematik i samspil med andre fag..

5. Paradigmatiske eksempler

1. Eksempel 111 : Euklids elementer med elevvalgte projekter
2. Eksempel 113: Middelværdisætningen, konvekse funktioner og l'Hospitals regel
3. Eksempel 114: Deduktivt forløb om løsning af differentiallyigninger
4. Eksempel 121 : Eksperimenterende forløb om differentialkvotienter
5. Eksempel 123: Eksperimenterende forløb om variabelbegrebet: Tilfældige rektangler
6. Eksempel 141: Differentiallyigningsmodeller
7. Eksempel 142: Funktioner af to variable
8. Eksempel 161: Eksempel på opskrift for læsning af en matematisk tekst
9. Eksempel 250: Engelsk tekst om Fermats sidste
10. Eksempel 201: Vækstmodeller og introduktion af variabelbegreb og variabelsammenhænge
11. Eksempel 210: Arvelighed, betingede sandsynligheder og Hardy-Weinbergs lov
12. Eksempel 211: Sandsynlighedsregning og retsgenetik
13. Eksempel 220: Statistik og vælgeradfærd
14. Eksempel 221: Stikprøver og databaser et forløb indenfor emnet statistik
15. Eksempel 223: Makroøkonomiske modeller og vismandsspillet
16. Eksempel 230: Radioaktivt henfald
17. Eksempel 231: Frit fald og udspring med faldskærm
18. Eksempel 233: Kinematik – projekter om emner fra det naturvidenskabelige gennembrud
19. Eksempel 250: Fourieranalyse og lyd
20. Eksempel 260: Jordskælv
21. Eksempel 270: Rum og dimension – om Abbott Abbotts Flatland
22. Eksempel 273: Risikovurdering – med eksempler fra store katastrofer som Three Miles Island og Challenger
23. Eksempel 280: Sammenligning af to måleserier
24. Eksempel 294: Matematiske modeller og SD-diagrammer
25. Eksempel 304: Hvornår er det sandt - Arven fra Euklid
26. Eksempel 305: Centralperspektiv og værdiperspektiv
27. Eksempel 400: Liste over gennemførte forløb. A-niveau. Skabelon
28. Eksempel 410: Eksempel på eksamensspørgsmål til mundtlig eksamen

Eksempel 111

Euklids elementer med elevvalgte projekter

Niveau: 1g/2g: B eller A

Tidsforbrug: I alt 8 moduler á 90 minutter

I. Indledning: 2 moduler

- Fælles basisviden: Klip fra Euklids elementer: Definitioner, aksiomer (forudsætninger), slutningsregler (almindelige begreber), sætningerne 1, 2, 3, 4(uden bevis), 5.
- Gruppedannelse: Efter valg af projektopgave

II. Arbejdet med Projektopgaver: 4 moduler

III. Produkt: Rapport og foredrag.

Krav til rapporten:

- Hvert gruppemedlem skal bidrage med en underskrevet del. Alle i gruppen skal være inde i det stof gruppen som helhed har arbejdet med.
- Der skal være en præcis litteraturliste over anvendt materiale, herunder de sider, som hører med til gruppens pensum inden for projektopgaven.
- Der skal være tydelig kildeangivelse, når en regel, sætning eller påstand anvendes uden bevis eller argumentation.
- For hver af opgaverne *skal* rapporten omfatte en fyldestgørende behandling af problemformuleringen samt svar på spørgsmålene a), b) og c).

Krav til foredraget: Gruppen vælger det mest centrale resultat, som gruppen har arbejdet med. Hvor flere grupper arbejder med den samme projektopgave, må grupperne blive indbyrdes enige om, hvilken gruppe, der fremlægger hvad, så vi ikke kommer til at høre på det samme to gange.

IV. Evaluering: 2 moduler.

Vurdering af rapport med henblik på sammenhæng, væsentlighed, ovenfor formulerede krav, korrekthed.

Vurdering af foredrag med henblik på væsentlighed og klarhed (i tale og i indhold).

Diskussion af positivt og negativt ved arbejdet i grupperne.

Projektopgaver:

Opgave 1: *Hvordan beviser Euklid Pythagoras' sætning, og hvorfor har så stor betydning inden for matematik og inden for anvendelser af matematik?*

- Hvordan beviser Euklid Pythagoras' sætning, og hvilke sætninger bygger beviset på?
- Hvilke andre beviser for Pythagoras' sætning findes der, og hvordan adskiller disse sig fra Euklids bevis?
- Hvilken betydning har Pythagoras' sætning for matematikken?
- Findes der praktiske anvendelser af Pythagoras' sætning?
- Hvordan lyder Pythagoras' omvendte sætning, og hvordan bevises den?

Opgave 2: *Hvilke opfattelser har der været/er der af begreberne punkt, linje, delelighed, og hvorfor har en afklaring af disse begreber så stor betydning?*

- hvilken opfattelse havde pythagoræerne af begreberne punkt og linje, hvordan kan de være nået frem til opfattelsen, og hvorfor måtte opfattelsen opgives?
- Hvilke problemer vedrørende den rette linje og punktet afslører Zenon med sine paradokser?
- Hvilken opfattelse af begreberne punkt og linje har Euklid, hvordan kan han være nået frem til opfattelsen, og hvilken status har opfattelsen i dag?
- Kan et linjestykke deles i det uendelige?
- Er summen af uendelig mange linjestykker uendelig?

- f) Find i en lærebog et bevis for sætningen om ensvinklede trekanter. Gælder dette bevis i alle tilfælde?

Opgave 3: Hvilke sætninger gælder der for ¹⁾ trekantens linjer: Medianer, midtnormaler, højder, vinkelhalveringslinjer og ²⁾ trekantens ind- og omskrevne cirkel? Hvorfor er sætningerne rigtige?

- Hvilke sætninger gælder der for de nævnte linjer, og hvordan bevises disse sætninger?
- Hvad forstås ved et *geometrisk sted*, og hvilke af de nævnte linjer er geometriske steder?
- Hvordan konstrueres en trekants omskrevne cirkel?
- Hvordan konstrueres den indskrevne cirkel?
- Hvad handler formlen $4RT=abc$ om, og hvordan bevises den?
- Hvad handler formlen $T=rs$ om, og hvordan bevises den?

Opgave 4: Hvad har den regulære 5-kant med det gyldne snit at gøre, og hvilken betydning har den regulære 5-kant?

- Hvordan konstruere en regulær femkant, hvordan begrundes konstruktionen?
- Hvilken forbindelse er der mellem den regulære femkant og det gyldne snit?
- Hvilken regulær polygon kan man konstruere ud fra den regulære femkant og en ligesidet trekant (regulær trekant)?
- Hvorfor kan man ikke konstruere en regulær 15-kant ved hjælp af en regulær 5-kant alene?
- Hvilke regulære polygoner kan man umiddelbart konstruere ved hjælp af en regulær femkant?

Eksempel 113

Middelværdisætningen, konvekse funktioner og l'Hospitals regel

- et forløb på B-niveau eller A-niveau om matematisk ræsonnement og bevis

Formål: At gennemføre et deduktivt forløb, hvor middelværdisætningen studeres, og sætninger og metoder vedrørende konvekse funktioner og vedrørende beregninger af bestemte grænseværdier udledes.

Forudsætninger: Hovedsætningen om kontinuerte funktioner samt en vis erfaring i arbejdet med differentialregning. Det vil være en store fordel, hvis der tidligere har været arbejdet systematisk med matematiske beviser, fx ideerne i indirekte beviser.

Fagligt stof og arbejdsformer:

1. En fælles diskussion af (alle detaljer i) beviset for maks-min sætningen, Rolles sætning og middelværdisætningen. Hvor er det man bruger hovedsætningen om kontinuerte funktioner? Hvad er det særegne ved disse beviser?
2. Et lille opgaveforløb, hvor eleverne arbejder med at anvende sætningerne, bl.a. til at argumentere for at n 'te grads polynomier højst har n rødder.
3. En fælles drøftelse af hvilken betydning f'' har et grafisk forløb. Derefter arbejder eleverne selv med opgaver, som giver en karakteristik af konvekse funktioner, frem til bevis for Jensens ulighed.
4. Fælles drøftelse – eller et udfordrende projekt – om den generaliserede middelværdisætning, samt om l'Hospitals regel og øvelser i at anvende denne.

Tidsforløb: 8-15 timer afhængig af hvor meget der gøres ud af punkt 4.

Materialer: Bjørn Grøn: Analysens grundlag, kapitel 3 + opgaver. Findes på [emu'en](#).

Ekke Thue Poulsen: Konvekse funktioner, artikel i Matematiske Ideer, matematiklærerforeningen.

Eksempel 114

Deduktivt forløb om løsning af differentialligninger

- et forløb på A-niveau om matematisk teori.

Fagligt mål: At gennemføre et eksemplarisk forløb over et stykke matematisk teori, hvor formler, metoder og sætninger udledes ved hele tiden at føre problemstillingerne tilbage til forudsætninger eller allerede viste sætninger. Forløbet kan deles op i to – man kan vælge kun at arbejde med 1. ordens differentialligninger, eller kun at arbejde med 2. ordens differentialligninger på grundlag af det gennemgåede kernestof om 1. ordens differentialligninger. Eller man kan vælge at gennemføre begge dele, evt. som et forløb der er opdelt i to dele.

Forudsætninger: Grundlæggende kendskab til differentialregning, til differentiations regler og et første kendskab til differentialligninger. Fortrolighed med monotonisætningen.

Fagligt stof og arbejdsformer:

1. En fælles diskussion af monotonisætningen og den fuldstændige løsning til ligningen $g'(x) = 0$. Endvidere diskuteres grundigt ideerne i omskrivningen af differentialligningen $y' = k \cdot y$ til en type, hvor monotonisætningen kan anvendes.
2. Eleverne arbejder selv med øvelser og med beviser for løsningsformler til $y' = b - ay$, $y' = f(x) \cdot y$, $y' = f(x) \cdot y + g(x)$.
3. En fælles diskussion af, hvorledes ligningerne $y'' = k^2 \cdot y$ og $y'' = -k^2 \cdot y$ kan omskrives og føres tilbage til 1. ordens differentialligninger.
4. Eleverne arbejder selv med øvelser og med beviset for løsningsformlen til ligningen $y'' + by' + cy = 0$. Der kan vælges enten at anvende metoden med integrationskonstant eller substitutionsmetoden.
5. En fælles drøftelse af løsningen til den inhomogene ligning $y'' + by' + cy = f(x)$ ved hjælp af gættemetoden.
6. Eleverne arbejder selv med løsning af den inhomogene ligning ved hjælp af substitutionsmetoden. Stærke elever kan udfordres med spørgsmål om generalisation af metoden til højere ordens ligninger.

Undervejs i forløbet veksles mellem teori og øvelser.

Tidsforbrug: Hele forløbet vil tage omkring 20 timer. Der kan gennemføres afrundede forløb på ca. 10 timer.

Materialer: Bjørn Grøn: Noter til 1. ordens differentialligninger, samt Noter til 2. ordens differentialligninger. Er placeret på [emu'en](#).

Eksempel 121

Ekspementerende forløb om differentialkvotienter

Hvordan differentierer man funktioner opbygget af en differentiabel funktion $f(x)$?

Hvordan differentierer man $f(x)^2$, $f(x)^3$, $\frac{1}{f(x)}$, $\frac{1}{(f(x))^2}$, $\sqrt{f(x)}$, $g(f(x))$?

Formål: At udvikle fortrolighed med differentiabilitet og tretrinsreglen samt at træne elementer fra udledningen af differentialkvotienten for x^2 , x^3 , x^4 , $\frac{1}{x}$, \sqrt{x} .

At udvikle undersøgekompetencen gennem arbejdsgangen
eksempler \rightarrow generalisering \rightarrow verificering.

Mål: At eleverne bliver i stand til selvstændigt at arbejde med tretrinsreglen og til at bestemme differentialkvotienten af en sammensat funktion $g(f(x))$

Problemformulering: Hvordan differentierer man $f(x)^2$, $f(x)^3$, $\frac{1}{f(x)}$, $\frac{1}{(f(x))^2}$, $\sqrt{f(x)}$, $g(f(x))$, når man ved, at $f(x)$ er differentiabel?

Forudsætning: Eleverne har udledt differentialkvotienten for de elementære funktioner x^2 , x^3 , x^4 , $\frac{1}{x}$, \sqrt{x} , og at de har set beviset for konstant-faktor reglen og sum reglen.

Produkt: En rapport som besvarer spørgsmålene i problemformuleringen og omfatter løsning af følgende opgave samt en beskrivelse af arbejdsprocessen, der ledte frem til svaret. Endvidere skal rapporten indeholde en overvejelse over svarets sandhedsværdi.

Opgave: Bestem differentialkvotienten for følgende funktioner:

$$(x^3 + 1)^2, (x^4 + 1)^{12}, \sqrt{x^4 + x^2 + 1}, \frac{1}{x^6 + x^4 + 4}, \ln(x^6 + x^4 + 4)$$

Tidsforbrug: 6-8 timer

Eksempel 123

Ekspementerende forløb om variabelbegrebet: Tilfældige rektangler

'Tilfældige rektangler' er et eksperimentelt projekt, der handler om variabelbegrebet og simple sammenhænge mellem variable. Det forudsætter et elementært kendskab til uafhængige og afhængige variable, samt simple og sammensatte variable. Klassen diskuterer i fællesskab, hvilke variable, der karakteriserer et rektangel. Herefter konstruerer eleverne lange lister over de variable, fx lister over 1000 tilfældige grundlinjer og højder, samt de tilhørende lister over omkreds og areal. Der tegnes XY-punktgrafer til illustration af sammenhængene, som derefter diskuteres i fællesskab: Hvilke figurer afgrænses i de forskellige tilfælde? Hvad bliver ligningerne for de rette linjer, der afgrænser figurerne? Her forudsættes ikke andet end et generelt kendskab til den rettes linjes ligning med betydningen af hældningskoefficienten og skæringen med andenaksen. Man vil også få lejlighed til at præsentere ligningen for en standardparabel $y = k \cdot x^2$, som nogle i klassen typisk vil kende på forhånd, men der forudsættes intet kendskab til parabler.

Mål:

- anvende variabilsammenhænge i modellering af givne data,
- gennemføre simple matematiske ræsonnementer
- anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer.

Niveau: Projektet egner sig glimrende til starten af grundforløbet. Der er senere muligheder for at vende tilbage til eksperimentet på de højere niveauer i forbindelse med mere avancerede overvejelser indenfor sandsynlighedsregning. Her vil integralregningen nemt kunne bringes på banen.

Samarbejdsmuligheder: Projektet kan afvikles i matematik, men kan også indgå i et HOT-samarbejde med fx naturvidenskabeligt grundforløb omkring variable og variabilsammenhænge.

Arbejdsformer og tidsforbrug: 4 × 45 minutter

Selve eksperimentet tager nemt en dobbeltime, med introduktion af projektet, instruktion i brug af værktøjer, fx en grafisk lommeregner, udførsel af eksperimentet og lidt fælles diskussion af de grafer, der fremkommer. Dertil kommer en efterbehandling på en dobbeltime med teori: Afgrænsning af figurerne med såvel eksperimentel som teoretisk fastlæggelse af ligningerne for de linjer og kurver, der afgrænser figurerne. Projektet afsluttes fx med en skriftlig rapport, hvor eleverne redegør for eksperimentet, dokumenterer resultaterne i form af tabeller og grafer, og diskuterer grafernes uformning så godt de formår. Specielt de teoretiske argumenter er svære at formulere skriftligt.

Anvendelse af it og værktøjsprogrammer: Det er oplagt at skrive rapporten og udføre eksperimentet med brug af IT-programmer. Her kan man med fordel introducere det graftegneprogram, man alligevel vil benytte i det daglige. Det kan fx være regnearket Excel, statistik og modelleringsprogrammet Fathom, eller CAS-programmet TI-Interactive. Eneste krav er adgangen til at frembringe lister over tilfældige tal og grafer for sådanne lister på simpel vis. Ligeledes kan enhver grafisk lommeregner bruges, hvis blot den indeholder kommandoer til frembringelse af lister med tilfældige tal i enhedsintervallet.

Undervisningsmaterialer: Eksperimentet er beskrevet i detaljer i hæftet 'Some like it hot'. Der er tale om et lærermateriale med diskussion af mulige konklusioner på eksperimentet, samt omtale af

hvordan forskellige redskaber kan anvendes i eksperimentet. Elevinstruktionen kan fx stå på et A4-ark og kræver ikke nogen selvstændig tekst.

Eksempel 141 Differentialligningsmodeller

Formål: Eleverne skal arbejde med de forskellige vækstmodeller og opnå indsigt i disse modellers forskelle, styrker og svagheder. De skal opnå indsigt i hvordan matematikken kan bruges til at beskrive fænomener fra andre fagområder og hvordan disse modeller kan bruges til at skaffe oplysninger om den fremtidige udvikling af en bestemt vækst.

Mål: Eleverne skal kende egenskaberne ved de tre forskellige former for vækst: eksponentiel vækst, forskudt eksponentiel vækst og logistisk vækst.

Tidsramme:

10-15 lektioner afhængig af proceduren.

Problemformulering:

I hvilken grad kan matematikken bruges til at beskrive vækstfænomener fra andre fagområder?

Organisering:

Der gives et oplæg til emnet som klasseundervisning, hvor de 3 vækstmodeller og egenskaber ved disse behandles, og hvor man gennemgår metoden til opstilling af modeller (se fx ”Modeller i Derive” af Niels Hjersing, Per Hammershøj Jensen og Børge Jørgensen, Matematiklærerforeningen, 2004).

Arbejdet foregår i grupper (3 elever). Teorien om differentialligningsmodeller bearbejdes i samarbejde i de enkelte grupper og der gennemarbejdes 3 eksempler på modeller i hver gruppe – to som er fælles for alle samt ét som er særligt for hver gruppe. Der afleveres en skriftlig rapport over dette arbejde samt en synopsis for den mundtlige fremlæggelse, der skal være af gruppens særlige problemstilling.

En variation kunne være følgende: Grupperne bearbejder de samme to eksempler og regner 2-3 særlige opgaver om emnet. Gruppearbejdet afsluttes med aflevering af rapporter og efterfølgende opgaveregning i klassen, hvor alle elever løser alle gruppens opgaver med grupperne som konsulenter på de 2-3 opgaver, de har besvaret. I rapporter vil der samlet set være udarbejdet en facitliste til opgaverne, som vil være til rådighed i dette efterfølgende arbejde.

Produkt:

Der afleveres en samlet skriftlig rapport, som redegør for nedennævnte punkter.

1. *Differentialligninger som vækstmodeller:* Forklar hvordan differentialligninger anvendes som vækstmodeller (begreberne væksthastighed og relativ væksthastighed skal indgå).
2. *3 vækstmodeller:* Gør rede for de 3 former for vækst: eksponentielvækst, forskudt eksponentiel vækst samt logistisk vækst, idet I for hver af typerne angiver følgende:
 - a) Differentialligningsmodel
 - b) Modellens løsningsfunktion
 - c) Et eksempel: Et begyndelsesværdiproblem (model med en begyndelsesbetingelse) samt løsningen til dette, og et plot af løsningsfunktionens graf i feltet af linieelementer.
3. *Sammenligning af 2 væksttyper* ved betragtning af en populationsvækst. Der opstilles modeller for en population. Først en eksponentiel model ud fra fx startpopulation, indvandring og udvandring, og dernæst en logistisk model, idet der tages hensyn til at væksten er begrænset af plads, næringsressourcer etc. og derfor har en øvre grænse. Brug dette til at diskutere de to modellers beskrivelseskraft.
4. *Betragt andre eksempler på differentialligningsmodeller:* [Vælg to eksempler (fx radioaktivitet, Newtons temperaturlov, forurening, hastighed for en faldskærmsudspringer etc. – ét eksempel, hvor modellen er givet og ét hvor modellen skal opstilles), som alle bearbejdes i samtlige grupper samt én særlig problemstilling pr. gruppe, som er mere

projektorienteret jf. fx ”Modeller i Derive” af Niels Hjersing, Per Hammershøj Jensen og Børge Jørgensen, Matematiklærerforeningen, 2004].

Alternativ:

Den sidste del i punkt 4 erstattes af følgende: *Løs de nedenfor nævnte opgaver svarende til jeres gruppenummer*: [Her angives 2-3 opgaver til hver gruppe afhængigt af opgavernes sværhedsgrad og gruppernes sammensætning (niveau)].

Eksempel 142

Funktioner af to variable – et emnearbejde

Formål: Eleverne skal stifte bekendtskab med et nyt matematisk emne, som bygger på kernefaglige emner de allerede kender. De skal se hvordan et regneteknisk hjælpemiddel kan bringes i spil og være med til at give en bedre forståelse af hvordan en tredimensionel kurve forløber i rummet.

Mål: Eleverne skal lære hvad man forstår ved en funktion af *to* variable, og lære nogle af de redskaber man har til at undersøge disse funktioners grafiske forløb.

Tidsramme: Ca. 20 lektioner i alt, incl. fælles introduktionsoplæg i klassen samt slutoplæg.

Organisering:

3 personer i grupper arbejder sammen om opgaven 15 timer svarende til 3 uger, hvorefter der dannes nye 3 personers grupper, hvor produktet skal fremlægges i et eksamensrollespil, hvor der trækkes lod blandt de 3 gruppemedlemmer om følgende roller: *Eksaminand:* Den der fremlægger for resten af gruppen og eksamineres af eksaminator, *Eksaminator/vejleder/hjælper:* Den der stiller vejledende spørgsmål undervejs og hjælper eksaminanden til at få de vigtigste ting med, *Censor:* Den der observerer, noterer og vurderer i hvilket omfang eksaminanden har fået det vigtigste med. Der skal regnes med en udvidet eksaminationstid på 30 minutter (normal 24 minutter).

Produkt (oplæg til eleverne):

Der laves et skriftligt produkt som demonstrerer, at I har forstået teorien og kan benytte denne i besvarelse af opgaver/øvelser. Desuden laves et 'udtræk' heraf, som skal fungere som forberedelse til den mundtlige fremlæggelse i de nye 3 mands grupper. Begge dele afleveres senest [deadline] i afleveringsmappen.

Det store produkt skal indeholde en besvarelse af nedenstående punkter, som også kan fungere som disposition for fremlæggelsen (med undtagelse af de sidste 2), hvor det mest fornuftige vil være at besvare spørgsmålene ud fra ét godt eksempel.

Intro: Hvad er en funktion af to variable? Giv eksempler på sådanne funktioner og deres 3D-grafer.

Niveaukurve: Forklar begrebet niveaukurve og vis med eksempler, hvordan de bestemmes ved beregning og hvordan de illustreres. Hvad kan man aflæse om funktionens graf ud fra niveaukurvernes indbyrdes beliggenhed?

Gradient: Hvad man forstår ved partielle afledede og gradienten for en funktion af to variable? Vis med et eksempel, hvordan man bestemmer disse. Desuden skal I gøre rede for en geometrisk tolkning af de partielle afledede. Endelig skal gradienten (gerne flere) illustreres sammen med niveaukurverne for den selvvalgte funktion, og det skal vises, at gradienten er normalvektor til funktionens niveaukurve.

Differentialet: Hvad man forstår ved differentialet for en funktion af to variable? Hvad differentialet kan bruges til?

Tangentplan: Hvad er en tangentplan til en kurve? Udled den generelle ligning for en tangentplan og brug denne til at finde tangentplanen for en selvvalgt funktion, og forklar hvad den kan bruges til.

Retningsafledet: Forklar begrebet retningsafledet og giv eksempler på bestemmelse heraf. Illustrer den retningsafledede sammen med hhv 3D kurven og niveaukurverne i 2D.

Stationære punkter: Hvilke typer af stationære punkter findes der for funktioner af to variable? Giv eksempler på hvordan disse findes og hvordan man afgør hvilken type stationært punkt, der er tale om.

Løs til slut følgende opgaver [en række opgaver, udvalgt således at eleverne kan vise at de kan bruge begreberne i praksis].

Litteratur: "Højt oppe, langt nede", Christian Thune Jacobsen, Matematiklærerforeningen 2004.

Eksempel 161

Eksempel på opskrift for læsning af en matematisk tekst

Din bog er ikke din egen, men udlånt fra skolen. Derfor kan du hverken understrege de vigtige ting i en tekst eller tilføje argumenter og mellemregninger, hvor det er nødvendigt. Men selvom det var din egen bog, ville det være nødvendigt at tage notater i tilknytning til læsningen. Fx fordi understregninger ofte kræver kommentarer eller uddybninger, der er mere omfattende end bogens margin tillader.

Trin 1: Forhåndsforståelse. Hvad handler teksten om? Hvad ved jeg om emnet i forvejen? Handler teksten om det, er foregik i undervisningen (Brug notater fra sidste lektion)?

Trin 2: Overblik. Hvilken type tekster består teksten af?

Lærestof: eksempel, sætning, bevis, anvendelse?

Læsestof: Introduktion til et emne, en definition, en sætning eller et bevis? Perspektiverende tekst?

Trin 3: Indlæring. Afhængig af teksttype:

Teksttype 1: Eksempel: Læs problemstillingen. Tegn, hvis det er muligt. Hvad er givet, hvad skal findes? Opfat eksemplet som en udvidet facitliste til en opgave, der skal løses.

Prøv at løse problemet selv!

Hvis du kunne løse problemet, sammenlign med tekstens løsning.

Hvis du ikke kunne løse problemet, begynd læsningen. MED PAPIR OG BLYANT. Hvis teksten beskriver en figur, så tegn figuren ud fra teksten. Sammenlign med tekstens tegning.

Kan du nu løse problemet alene?

Hvis ikke, så læs videre – skriv hvert skridt ned. Tilføj mellemregninger. Argumenter for hvert skridt i løsningsprocessen. Prøv hele tiden at gå videre med løsningen uden at se i bogen.

Når du er kommet til vejs ende, skal du

- Gøre dig klart, om der var problemer (fx begrundelser), som du ikke kunne finde ud af.
- Formulere hvert enkelt problem så præcist som muligt, skriv præcist ned, hvor problemet dukker op i teksten.

Repetere: Hvad var problemstillingen? Kan du gennemgå løsningen uden at kigge i teksten? Først når du er i stand til dette, har du tilegnet dig **lærestoffet** !

Teksttype 2: Sætning, regel, formel/bevis:

Hvad siger sætningen, reglen, formlen? Hvordan bruges den? Tag dine notater fra undervisningen til hjælp. Blev beviset gennemgået i klassen? Har du udført beviset i klassen? Prøv, om du kan gennemføre beviset uden at støtte dig til teksten. Hvis du ikke kan det, så gå frem som ovenfor under Eksempel.

Du har først tilegnet dig lærestoffet, når du er i stand til at gennemgå beviset uden at støtte dig til teksten.

Når du er nået til vejs ende, skal du efterbehandle arbejdet:

Hvad var givet, hvad skulle bevises?

Hvad var hoved-ideen i beviset?

Var der problemer med begrundelserne? Hvor præcist opstod de? Skriv ned, og formuler så præcist som muligt, hvad problemet var.

Eksempel på spørgsmål til en lektie i matematik

Øvelse 1. Tekst: Lærebog, indledende afsnit om: Geometri

Besvar spørgsmålene i TRIN 1 og TRIN 2 i opskriften ovenfor.

I dine notater skulle der gerne være svar på følgende spørgsmål:

Hvad betyder ordet geometri?
Hvorfor er det nødvendigt at måle og veje?
Hvorfra og fra hvornår stammer de ældste vidnesbyrd om arbejde med geometri? Hvilken form for geometri var der tale om?
Hvornår begyndte man at begrunde metodernes rigtighed?
Hvordan lyder formlen for en trekants areal?
Hvordan finder man arealet af en firkant?
Hvad er en spids vinkel? En stump vinkel?
Tegn en trekant og kald den PQR. Hvordan betegnes trekantens sider?
Tegn en grundlinje og den tilsvarende højde i en trekant.
Hvad er et trapez?
Hvad siger Pythagoras' sætning for trekant PQR, $P=90^\circ$?
Hvad siger Pythagoras' omvendte sætning?

Øvelse 2: Tekst: Lærebog om Geometri og trigonometri, side ... (afsnit om sætninger og beviser).

Besvar spørgsmålene vedrørende lærestof i opskriften ovenfor. Anvend TRIN 3, teksttype, og besvar spørgsmålene her.

Dine studienotater skulle gerne indeholde svar på spørgsmål som følgende:

Hvor står den sætning, teksten handler om? Hvor begynder beviset – hvor slutter det?

Hvilke mellemregninger, som ikke er anført i bogen, havde du svært ved at forstå?

Ud af beviset træder der en bonus frem: En ny formel for arealet af en trekant. Hvad siger formlen?

Side ... : Teksten er *lærestof*. Den består af øvelser og eksempler.

Anvend TRIN 3, teksttype 1. Besvar spørgsmålene her.

Dine notater skulle gerne indeholde svar på følgende spørgsmål:

I bogens bevis er der en indskrænkning, et forbehold. Øvelse ... handler om dette forbehold? Hvad er forholdet i det gennemførte bevis?

Hvilket problem skal løses i eksempel ...? Prøv at løse problemet, før du læser i bogen.

Øvelse ... er egentlig et eksempel: Det *lumske tilfælde*.

Hvad er det lumske ved problemet? Hvad kendetegner det lumske tilfælde?

Løs problemet i sidste linje i eksemplet.

Eksempel 162

Engelsk tekst om Fermats sidste sætning

Pierre de Fermat died in 1665. Today we think of Fermat as a number theorist, in fact as perhaps the most famous number theorist who ever lived. It is therefore surprising to find that Fermat was in fact a lawyer and only an amateur mathematician. Also surprising is the fact that he published only one mathematical paper in his life, and that was an anonymous article written as an appendix to a colleague's book.

Because Fermat refused to publish his work, his friends feared that it would soon be forgotten unless something was done about it. His son, Samuel undertook the task of collecting Fermat's letters and other mathematical papers, comments written in books, etc. with the object of publishing his father's mathematical ideas. In this way the famous 'Last theorem' came to be published. It was found by Samuel written as a marginal note in his father's copy of Diophantus's *Arithmetica*.

Fermat's Last Theorem states that $x^n + y^n = z^n$ has no non-zero integer solutions for x, y and z when $n > 2$. Fermat wrote *I have discovered a truly remarkable proof which this margin is too small to contain.*

Fermat almost certainly wrote the marginal note around 1630, when he first studied Diophantus's *Arithmetica*. It may well be that Fermat realised that his *remarkable proof* was wrong, however, since all his other theorems were stated and restated in challenge problems that Fermat sent to other mathematicians. Although the special cases of $n = 3$ and $n = 4$ were issued as challenges (and Fermat did know how to prove these) the general theorem was never mentioned again by Fermat.

In fact in all the mathematical work left by Fermat there is only one proof. Fermat proves that *the area of a right triangle cannot be a square*. Clearly this means that a rational triangle cannot be a rational square. In symbols, there do not exist integers x, y, z with $x^2 + y^2 = z^2$ such that $xy/2$ is a square. From this it is easy to deduce the $n = 4$ case of Fermat's theorem.

It is worth noting that at this stage it remained to prove Fermat's Last Theorem for odd primes n only. For if there were integers x, y, z with $x^n + y^n = z^n$ then if $n = pq$, $(x^q)^p + (y^q)^p = (z^q)^p$.

Euler wrote to Goldbach on 4 August 1753 claiming he had a proof of Fermat's Theorem when $n = 3$. However his proof in *Algebra* (1770) contains a fallacy and it is far from easy to give an alternative proof of the statement which has the fallacious proof. There is an indirect way of mending the whole proof using arguments which appear in other proofs of Euler so perhaps it is not too unreasonable to attribute the $n = 3$ case to Euler.

Euler's mistake is an interesting one, one which was to have a bearing on later developments. He needed to find cubes of the form $p^2 + 3q^2$ and Euler shows that, for any a, b if we put

$$p = a^3 - 9ab^2, q = 3(a^2b - b^3) \text{ then}$$

$$p^2 + 3q^2 = (a^2 + 3b^2)^3.$$

This is true but he then tries to show that, if $p^2 + 3q^2$ is a cube then an a and b exist such that p and q are as above. His method is imaginative, calculating with numbers of the form $a + b\sqrt{-3}$. However numbers of this form do not behave in the same way as the integers, which Euler did not seem to appreciate.

The next major step forward was due to Sophie Germain. A special case says that if n and $2n + 1$ are primes then $x^n + y^n = z^n$ implies that one of x, y, z is divisible by n . Hence Fermat's Last Theorem splits into two cases.

Case 1: None of x, y, z is divisible by n .

Case 2: One and only one of x, y, z is divisible by n .

Sophie Germain proved Case 1 of Fermat's Last Theorem for all n less than 100 and Legendre extended her methods to all numbers less than 197. At this stage Case 2 had not been proved for even

$n = 5$ so it became clear that Case 2 was the one on which to concentrate. Now Case 2 for $n = 5$ itself splits into two. One of x, y, z is even and one is divisible by 5. Case 2(i) is when the number divisible by 5 is even; Case 2(ii) is when the even number and the one divisible by 5 are distinct.

Teksten findes på adressen:

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Fermat's_last_theorem.html

History topic: Fermat's last theorem

Forløbet kan gennemføres i et samarbejde med engelsk med fokus på :

Andrew Wiles and his proof of Fermat's Last Theorem

Matematik bidrager med:

- Elementær talteori.
- Pythagoras' sætning.
- Pythagoræiske Tripler.
- Om beviser.
- Fermat og hans matematik.
- Andre uløste matematiske problemer.

Litteratur: Steffen Due Bentzen: Fermats *Sidste Sætning – hvorfor er den stadig ikke bevist*, i Matematiske Ideer, Matematiklærerforeningen 1992.

Engelsk bidrager med:

- Tekster om mennesket og matematikken (Men of Mathematics, E.T. Bell, Div. Bøger om Wiles).
- Tekster om Pythagoras.
- Tekster om Fermat og hans tid (Simon Singh's "Fermat's Last Theorem", Amir d. Aczel: "Fermat's Last Theorem: Unlocking the Secret of an Ancient Mathematical Problem", Paulo Ribenboim: "Fermat's Last Theorem for Amateurs").
- En video-udsendelse om Wiles, som er vist på DR.
- Diverse web-materialer (fx: <http://www.pbs.org/wgbh/nova/proof/>).

Eksempel 201

Vækstmodeller og introduktion af variabelbegreb og variabelsammenhænge

Forløbet består af en række øvelser med vækstmodeller inden for forskellige anvendelsesområder. Indenfor kernestoffet på C-niveauet beskæftiger det sig især med de følgende to områder:

- formeludtryk til beskrivelse af ligefrem og omvendt proportionalitet samt lineære sammenhænge, eksponentielle sammenhænge og potenssammenhænge mellem variable
- xy-plot af datamateriale samt karakteristiske egenskaber ved lineære sammenhænge, eksponentielle sammenhænge og potenssammenhænge samt anvendelse af regression.

Indenfor de faglige mål sigter forløbet især på de følgende overordnede mål:

- håndtere simple formler, herunder oversætte mellem symbolholdigt og naturligt sprog og kunne anvende symbolholdigt sprog til at løse simple problemer med matematisk indhold
- anvende variabelsammenhænge i modellering af givne data, kunne foretage fremskrivninger og forholde sig reflekterende til disse samt til rækkevidde af modellerne

Men dertil kommer også væsentlige bidrag til de følgende to mål:

- demonstrere viden om matematikanvendelse samt eksempler på matematikkens samspil med den øvrige videnskabelige og kulturhistoriske udvikling.
- anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer.

Niveau

Materialet er udarbejdet med tanke på matematik i grundforløbet (C-niveau). Dele af materialet kan dog også indgå på højere niveauer.

Samarbejdsmuligheder

Temaet om idræt lægger op til tværfagligt samarbejde med idræt og evt. fysik. Temaet om kropsvægt og andre biologiske størrelser hos pattedyr, samt nedbrydning af rusmidler lægger tilsvarende op til et tværfagligt samarbejde med biologi. Herudover er der oplagte samarbejdsmuligheder med f.eks. det naturvidenskabelige grundforløb om modellering af simple eksperimenter i de naturvidenskabelige fag.

Timeforbrug

Tema om idræt: 10 timer, tema om kropsvægt: 10 timer, tema om rusmidler: 6 timer.

Arbejdsformer

Hovedsagelig øvelsesregning i grupper. Temaet om idræt rummer en del selvstændig elevaktivitet med indsamling af data.

Anvendelse af it og værktøjsprogrammer.

Gode muligheder. Vejledning til relevante aspekter af udvalgte værktøjer – regneark, CAS-programmer og grafregnere – er inkluderet i særskilte afsnit. Brugen af sådanne hjælpemidler er påkrævet for at få det fulde udbytte af undervisningsforløbet. Forløbet kan udmærket gennemføres alene med PC-værktøjsprogram, f.eks. et regneark som Excel. Råder klassen over grafiske lommeregnere, f.eks. TI-84, er det også muligt at gennemføre forløbet alene med støtte fra disse.

Undervisningsmaterialer / er det tilgængelige lærermaterialer eller elevmaterialer?

Hæftet ”Vækst”, som er placeret på [emu'en](#). Forløbet kan baseres udelukkende på dette hæfte.

Eksempel 210

Arvelighed, betingede sandsynligheder og Hardy-Weinbergs lov

- et samarbejde mellem matematik og biologi

Genetik er et klassisk samarbejdstema mellem matematik og biologi. Matematisk set arbejdes der her med vejet gennemsnit og frekvensfordeling af generne. Endvidere arbejdes med statistisk fordeling af generne og statistisk beskrivelse af de egenskaber (fx sygdomme) som bestemte arveanlæg kan medføre med forhøjet sandsynlighed. Emnet lægger op til flere praktiske eksperimenter i biologi med arveegenskaber og undersøgelser i databanker.

De nye bioteknologier, fx genmanipulation og fosterscreening, lægger op til vurderinger, der bygger på anvendelse af statistik og sandsynligheder, også har en udpræget etisk dimension vi et samarbejde med dansk og religion være nærliggende.

Mål: - indsamling og bearbejdning af data til belysning af en (på baggrund af statistik) opstillet hypotese.

- anvende simple statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller til beskrivelse af et givet datamateriale eller fænomener fra andre fagområder, kunne stille spørgsmål ud fra modeller, have blik for hvilke svar, der kan forventes, samt være i stand til at formulere konklusioner i et klart sprog

Niveau: Kan benyttes fra C-niveau og opefter. Det vil være en stor fordel at tilrettelægge forløbet på et tidspunkt, hvor klassen også har biologi.

Samarbejdsmuligheder: Velegnet til et samarbejde med biologi, dansk og engelsk. Hvis moderne bioteknologi inddrages, vil emnet være oplagt som et forløb i Almen studieforbereelse.

Arbejdsformer og tidsforbrug:

I matematik kan man med klassen gennemgå den klassiske populationsgenetik (Mendels love, Hardy-Weinbergs lov). Man kan også inddrage eksempler på betingede sandsynligheder. Dette kan gøres eksemplarisk ud fra skematisk opstilling af værdierne for to variable (fx rygere/ikke-rygere; lungekræft/ikke-lungekræft), da den teoretiske behandling af betingede sandsynligheder ofte vil være meget vanskelig for eleverne. Dette kan så indgå i vurderinger af personers arveligt betingede sandsynlighed for at udvikle bestemte sygdomme. Efter denne introduktion kan eleverne så arbejde emneorienteret i grupper med emner, som lærerteamet på forhånd har udvalgt. Man kan tilrettelægge et rollespil og etiske emner i forbindelse hermed ud fra en konkret case. Det kunne at skulle tage stilling til om man skal tilråde en abort i tilfælde, hvor fosteret har vist anlæg for en bestemt sygdom. Her kunne eleverne repræsentere forældrene, lægerne, statistikere, samfundsøkonomer, religiøse (kristne og muslimer fx) og indlede med at finde ud af, hvilke synspunkter sådanne personer kunne have, og så med disse synspunkter optræde i en paneldebat for klassen. Man kunne også lade et sådan forløb udmunde i, at klassen tilrettelægger en temadag for hele skolen og bio-etiske spørgsmål og får markante kulturpersonligheder og eksperter til at holde oplæg.

Undervisningsmaterialer:

I matematik kan man fx finde en god introduktion i ”Matematiks anvendelser i biologi” Munksgaard 1974.

Eksempel 211

Sandsynlighedsregning og retsgenetik

- et samarbejde mellem matematik og biologi

Sandsynlighedsregning har mange anvendelser i biologi. I forbindelse med eksempelvis kriminalsager, familiesammenføringssager eller faderskabssager opstår der ofte behov for identifikation af personer ud fra kendskab til blodtyper eller genetisk information.

Sandsynlighedsregning er et nødvendigt redskab i sådanne identifikationssager. For at kunne beregne, at en given mand er 10.000 gange så sandsynlig som fader til et barn end en tilfældig mand, kræves et indgående kendskab til regning med betingede sandsynligheder og Bayes' formel. Beregningerne kompliceres let, hvis man for eksempel ikke har adgang til biologisk materiale fra den formodede far, men kun fra nogle nært beslægtede. Computerprogrammet "Hugin" kan benyttes til løsning af de komplicerede problemstillinger ved hjælp af opstilling af såkaldte Bayesianske net.

Mål: at anvende simple statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller til beskrivelse af et givet datamateriale eller fænomener fra andre fagområder, kunne stille spørgsmål ud fra modeller, have blik for hvilke svar, der kan forventes, samt være i stand til at formulere konklusioner i et klart sprog

Niveau: Matematik A-niveau eller B-niveau

Samarbejdsmuligheder:

I biologi på B-niveau eller A-niveau undervises som en del af kernestoffet i genetik samt nedarvningsmønstre. Endvidere skal eleverne i biologiundervisningen se eksempler på undersøgelses- og analysemetoder inden for genetik – eksempelvis PCR. Disse elementer kan oplagt kombineres med sandsynlighedsregning i matematik på A- eller B-niveau. Sandsynlighedsregningen er en del af det supplerende stof.

Arbejdsformer og tidsforbrug:

Forløbet kan tage fra 5-20 timer afhængig af, hvor meget "Hugin" skal inddrages. Eleverne skal på forhånd have stiftet bekendtskab med sandsynlighedsregning og elementær arvelighedslære - herunder blodtyper. Efterfølgende indførelse af Bayes' formel og beregninger på simple eksempler tager 8-10 timer.

I den indledende del af forløbet vil lærerstyret gennemgang af begreberne være fordelagtigt. Senere i forløbet bør eleverne arbejde i grupper, enten med forskellige opgaver eller med de samme opgaver. Arbejde med "Hugin" kan passende finde sted som pararbejde.

Anvendelse af it og værktøjsprogrammer:

Computerprogrammet "Hugin" samt grafregner. Excel er meget anvendeligt til behandling af PCR-resultater.

Undervisningsmaterialer:

Matematikbog indeholdende basal sandsynlighedsregning.

En demoversion af programmet "Hugin" kan downloades på hjemmesiden:

http://www.hugin.com/Products_Services/Products/Demo/

Se endvidere eksempel på undervisningsmaterialer på [emu'en](http://www.emu.ac.uk).

Finn V. Jensen: "Introduction to Bayesian Networks", Institut For Matematik og datalogi, Aalborg Universitet 1993.

Eksempel 220

Statistik og vælgeradfærd

- et samarbejde mellem matematik og samfundsfag

Hvem stemmer på hvilke partier? Valgforskere og meningsmålingsinstitutter undersøger hele tiden, hvad de danske vælgere ville stemme, hvis der var valg i morgen, og hvorledes partivalget afhænger af alder, køn, uddannelse, stilling og bopæl. Dette materiale er særdeles velegnet til arbejde med statistik.

Mål: Formålet er at give eleverne/kursisterne forståelse for indholdet og budskabet i opinionsundersøgelser.

Niveau: Forløbet kan gennemføres på forskellige niveau med forskelligt indhold:

- for C-niveau på hf og i gymnasiet ved at anvende materialet fra [emu'en](#)
- for B-niveau på hf og i gymnasiet og A-niveau i gymnasiet ved at arbejde mere indgående med emnet.

Samarbejdsmuligheder: Forløbet kan tilrettelægges i samarbejde med samfundsfag.

Arbejdsformer : I forskellige dele af forløbet vil forskellige arbejdsformer være naturlige. I den indledende del vil traditionel lærergennemgang vekslende med øvelser være bedst og senere i talbearbejdelsen og spørgeskemaprojektet vil gruppearbejde være det mest optimale.

Timeforbrug:

Timeforbruget i C-niveau vil være 6-8 klokketimer.

Timeforbruget i B- og A-niveau vil være 10-12 klokketimer inkl. empirisk undersøgelse med efterbearbejdning.

Anvendelse af it: Regneark eller statistiske programmer indgår.

Indhold

C-niveau:

Hvordan finder man frem til hvor nøjagtige opinionsundersøgelser er? (jf. undervisningsmaterialet)

B- og A-niveau:

Samfundsfag indeholder emneområdet politik, og vælgeradfærd er en del af kernestoffet. I den samarbejdet med matematik etableres skal de politiske partier og det danske politiske system være gennemgået i samfundsfagsundervisningen. Herefter følger et forløb, hvor man beskriver og analyserer de danske vælgere adfærd ud fra det tilgængelige datamateriale og til slut kan eleverne selv lave en empirisk undersøgelse ved fx at indsamle oplysninger om, hvad eleverne (opdelt på piger og drenge) på deres egen skole ville stemme, hvad deres forældre stemmer, hvilken uddannelsesbaggrund deres forældre har osv.

De kan så undersøge om forældrenes partivalg har betydning for deres partivalg, om der er forskel på pigers og drenges partivalg, om forældrenes uddannelsesbaggrund ser ud til at betyde noget osv. Såvel deskriptiv statistik, middelværdi, spredning, kvartilsæt, histogram, sumkurve som hypotesetest (χ^2 -test) kan illustreres og anvendes i forbindelse med disse data.

Undervisningsmaterialer

Til C-niveau:

- Hans Vestergaard og Jette Rygaard Poulsen: Hvad er meningen? Et forløb om opinionsundersøgelser. Findes på [emu'en](#).

Til B- og A-niveau:

- Gængse lærebøger om deskriptiv statistik.
- Samfundsfag/Den digitale håndbog til samfundsfag – udgives i opdateret udgave hvert år ved juletid. Forlag Columbus.
- www.statistikbanken.dk
- www.gallup.dk
- Per Vejrup-Hansen, Statistik med Excel, Samfundslitteratur.
- www.samfundsfag.aau.dk - [hvor eleverne/kursisterne kan hente data fra en vælgerundersøgelse af valget i 2001](#)

Eksempel 221

Stikprøver og databaser

- et forløb indenfor emnet statistik

'Stikprøver og databaser' er et forløb, der introducerer Explorative Data Analysis (EDA) til analyse af spørgeskemaer og stikprøver fra fx databaser. Udgangspunktet er et autentisk datamateriale enten frembragt af eleverne selv, fx via en spørgeskemaundersøgelse, eller hentet på nettet i en passende database. De eksperimentelle data fremstilles grafisk på forskellig vis og der udpeges/undersøges mulige variabelsammenhænge. Forløbet kan eventuelt udvides med en undersøgelse af vigtige statistiske egenskaber for stikprøver i en sådan database.

Mål:

- anvende simple statistiske modeller til beskrivelse af et givet datamateriale, kunne stille spørgsmål ud fra modellen, have blik for, hvilke svar der kan forventes, og være i stand til at formulere konklusioner i et klart sprog.
- anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer.

Niveau:

Projektet egner sig til både til grundforløbet og til højere niveauer.

Samarbejdsmuligheder:

Projektet kan afvikles i matematik, men kan fint indgå i et samarbejde med fx naturvidenskabeligt grundforløb eller samfundsfag C omkring beskrivelse af datasæt. Det vil også afhængigt af det valgte tema kunne indgå i almen studieforbereelse.

Arbejdsformer og tidsforbrug: 8×45 minutter

Klassen introduceres til de begreber og metoder der er karakteristiske for EDA, dvs. specielt de karakteristiske grafiske værktøjer som fx XY-punktgrafer, kassegrafer og histogrammer til opdagelse af karakteristiske mønstre og sammenhænge, men også til simple kvantitative mål som middelværdier, medianer og kvartiler. Derefter stilles et spørgeskema eller en database til elevernes rådighed for den følgende analyse. Man kan fx udnytte at man på mange skoler som led i en indledende snak med klassen om deres forudsætninger og forventninger indleder skoleåret med en spørgeskemaundersøgelse af elevernes fritidsvaner, lektievvaner, forventninger til gymnasiet osv. Hvis disse data opsamles elektronisk kan de nemt konverteres til en fælles database, hvor oplysningerne om eleverne fremstår i en passende anonymiseret form. Eleverne kan derefter udvælge forskellige størrelser (variable) med henblik på en afklaring af hvilke andre variable, der kan tænkes at påvirke eller blive påvirket af den givne størrelse ligesom man kan undersøge om der er forskel mellem forskellige grupper, om der er størrelser, der varierer sammen osv. Undersøgelsen kan munde ud i en skriftlig rapport om de fundne sammenhænge, hvor der sættes ord på tolkningen af graferne, ligesom den kan munde ud i en mundtlig fremlæggelse/diskussion med klassen af de sammenhænge, man mener at have påvist.

Anvendelse af it og værktøjsprogrammer:

Det er oplagt at bruge det statistikværktøj, man alligevel vil benytte i det daglige, fx regnearket Excel eller statistik- og modelleringsprogrammet Fathom.

Undervisningsmaterialer:

Man kan finde eksempler på en sådan tilgang til spørgeskemaanalyser i hæftet:

Spørgeskemaanalyser. I dette hæfte refereres til en stor tysk spørgeskemaundersøgelse af gymnasieelevers fritidsvaner Muffins, der er tilgængelig på nettet.

På nettet findes desuden adskillige diskussioner af Explorative Data Analysis. Fx kan man finde en detaljeret gennemgang EDA fra en naturvidenskabelig synsvinkel i kapitel 1 af håndbogen 'Engineering Statistics Handbook', der frit kan downloades fra nettet stillet til rådighed af det amerikanske National Bureau of Standards.

Eksempel 223

Makroøkonomiske modeller og vismandsspillet

- et samarbejde mellem matematik og samfundsfag

Emnet:

SMEC og ADAM er store makroøkonometriske modeller som de økonomiske vismænd og finansministeriet anvender når de skal lave finanspolitiske forudsigelser. Til brug for undervisningen i økonomi i samfundsfag er der lavet en mini-udgave af disse modeller (Vismandsspillet eller DK-spillet). Modellen er velegnet til at illustrere og træne eleverne i de nationaløkonomiske sammenhænge. Det er oplagt at matematikundervisningen tager fat i disse modeller. Modellerne er opbygget som et system af dynamiske lineære ligninger (differensligninger). Man kan således arbejde med løsning af lineære ligningssystemer, differens og differentiaalligninger, kvotientrækker og naturligvis det generelle modelaspekt.

Niveau:

Samfundsfag A-niveau, matematik B- eller A-niveau.

Samarbejdsmuligheder:

I læreplanen for samfundsfag A-niveau er det krævet at: ”I dele af det økonomiske stof og kvantitativ samfundsvidenskabelig metode, herunder anvendelse og fortolkning af statistiske mål, sker der en samordning med matematik”.

Timeforbrug:

Efter at begge fag har undervist eleverne i de grundlæggende begreber og teorier kan man tænke sig et tværfagligt projektforsløb af ca. 15 timers varighed.

Arbejdsformer:

Gruppearbejde – vekslende med elev- og lærerforedrag.

Anvendelse af IT og værktøjsprogrammer:

Anvendelse af IT er påkrævet da en del af arbejdet drejer sig om DK-spillet. Der er ingen særlige krav til lommeregnerne.

Undervisningsmateriale:

Henrik Adrian og Jesper Jespersen m.fl. *Europaøkonomi*, Gyldendal Undervisning 1995, side 105-123.

Finansrådet, 2003 *Vismandsspillet*

Malchow-Møller, Nikolaj og Jens Jakob Nordvig-Rasmussen: ”Traditionelle Makromodeller”, notat findes på www.mat.dk

Vismandsspillet og makroøkonomi, af Henrik Adrian, Helge Gram Christensen, Morten Gjeddebæk og Ernst Jensen, notat findes på www.mat.dk

Eksempel 230

Radioaktivt henfald

- et samarbejde mellem matematik og fysik

Radioaktivt henfald er et oplagt emne for et samarbejde mellem matematik og fysik. Nedenfor præsenteres nogle muligheder for et sådant samarbejde, afhængigt af elevernes niveau og forudsætninger i de to fag og af, hvor lang tid man ønsker at bruge på forløbet. Man kan nøjes med at undersøge et enkelt radioaktivt henfald og opstille en model herfor. Men typisk er det nye stof, der dannes ved et henfald, selv radioaktivt og vil ved et nyt henfald omdannes til et tredje stof. Det er derfor nærliggende at udvide forløbet til også at behandle en sådan kæde af henfald. I dette arbejde kan man eventuelt udnytte kendskab til differentiallyigninger.

Mål (matematikkompetencer):

- anvende funktionsudtryk og afledet funktion i opstilling af matematiske modeller på baggrund af datamateriale eller viden fra andre fagområder, kunne forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidde af modellerne, kunne analysere givne matematiske modeller og foretage simuleringer og fremskrivninger
- demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder
- anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer.

Niveau: Forløbet bygger på elevernes kendskab til eksponentiel vækst og differentialregning. Det er endvidere muligt at inddrage differentiallyigninger i arbejdet. Emnet egner sig derfor til klasser med matematik på A- eller B-niveau.

Samarbejds muligheder: Undervisningsforløbet gennemføres i et samarbejde mellem matematik og fysik og er kun egnet til klasser, der har begge disse fag. I fysik indgår radioaktivitet som kernestof på A- og B-niveau, men ikke på C-niveau.

Forslag til forløb: Det forudsættes, at eleverne har kendskab til den eksponentielle vækstmodel. Det radioaktive henfald kan introduceres ved en tilfældighedsmodel og simuleres med terningkast (fx som beskrevet i Manhattan Projektet, se nedenfor). Til resultatbehandlingen benyttes eksponentiel regression, og det fremkomne funktionsudtryk fortolkes. I fysik gennemføres målinger på et eller flere radioaktive stoffer med en tilsvarende resultatbehandling. I arbejdet med henfaldsloven og begrebet aktivitet inddrages differentialregning (fx som beskrevet i Gymnasiematematik 2A, se nedenfor). Forløbet kan afsluttes med rapportskrivning, fælles for matematik og fysik. Man kan desuden inddrage henfaldskæder (se fx Manhattan Projektet) og opstille en model ved hjælp af differentialkvotienter. Modellen analyseres, og henfaldene simuleres med et passende it-værktøj.

Hvis eleverne har kendskab til løsning af differentiallyigninger, kan det inddrages i arbejdet med modellering af en henfaldskæde (fx som beskrevet i Modeller i Derive, se nedenfor).

Forløbet kan tilrettelægges som emnearbejde i grupper eller som projektarbejde.

Anvendelse af it og værktøjsprogrammer: Resultatbehandling for forsøgene med terningkast og måling på radioaktive stoffer kan fx ske med programmet FPro eller et regneark. Til arbejdet med differentiallyigningsmodellerne kan fx FPro eller Derive benyttes.

Undervisningsmaterialer: Emnet er behandlet mange steder. Forløb som de ovenfor skitserede kan fx bygge på: Christensen og Meyer: *Manhattan Projektet*, Munksgaard 1989 (kapitel 2), Jessen,

Møller, Mørk: *Gymnasimatematik 2A – Vektorer, geometri og differentialregning*, Gyldendal 1998 (p. 247 ff) og Hjersing, Hammershøj Jensen, Jørgensen: *Modeller i Derive*, Matematiklærerforeningen 2004 (projekt nr. 9).

Eksempel 231

Frit fald og udspring med faldskærm

- et forløb til B-niveau, hvor der modelleres uden brug af differentiallyigninger eller til A-niveau, hvor der modelleres med brug af differentiallyigninger. Forløbet er velegnet til et samarbejde med fysik.

Formål: At gennemføre et projektforsløb, hvor der arbejdes med formeludtryk og variabelsammenhænge, og hvor der opstilles matematiske modeller ud fra en viden fra fysik eller på baggrund af eksperimenter.

Forudsætninger:

Afhænger af det niveau hvorpå det gennemføres. På A-niveau skal der forud være arbejdet med elementer af teorien for differentiallyigninger. På B-niveau skal der forud have været arbejdet med mere simple formeludtryk.

Fagligt stof og arbejdsformer:

Materialet lægger op til en projektarbejdsform, hvor eleverne undervejs selv sætter sig ind i de matematiske og fysiske problemstillinger vedrørende frit fald med og uden luftmodstand, Reynoldstal og turbulens, og hvor der på B-niveau modelleres ud fra et empirisk materiale, mens der på A-niveau arbejdes med opstilling af differentiallyigningsmodeller og løsning af de tilhørende differentiallyigninger enten analytisk eller numerisk.

Tidsforbrug og produkt:

10-12 timer + elevtid til udarbejdelse af en rapport.

Materialer:

Et projektoplæg om emnet er placeret på [emu'en](#). Endvidere findes på samme adresse en rapport over et sådant forløb til B-niveau.

Eksempel 233

Kinematik – projekter om emner fra det naturvidenskabelige gennembrud

- et samarbejde mellem matematik og fysik

Niveau: 2g/3g, B eller A

Tidsforbrug i alt 11-13 moduler á 90 minutter //(incl. Studietur): 16- 18 moduler

Materiale:

M1: FC,PP,GS: Analytisk geometri og funktioner, Munksgaard (Gyldendal) 1989

M2: F.Clausen, J.Falkesgaard, M.Løndahl, J.Tiedecke: Skabt til at skabe, Aschehaug, 1990

M3: Poul Lacour: Historisk fysik 1, Rosenkilde og Bagger, København 1960

M4: L.Hogben: Matematik for millioner, Gyldendalske Boghandel, København 1938.

M5: Dava Sobel: Longitude, Fourth Estate, London 1995

M6: Verner Schilling: Det kosmiske urværk, Munksgaard, 1992

Indledning: 5 moduler.

Materiale: M1: side 27-30, 38-39 , M2: side 23 – 26

Indhold: Det aristoteliske verdensbillede. Indføres af Thomas Aquinas i kirken. Ptolemæus & Kopernikus' verdensbillede. Tycho Brahe og Kepler. Galileis beskrivelse af det frie fald Galileis beskrivelse af det skrå kast. Den naturvidenskabelige arbejdsmetode. Den hypotetisk deduktive metode. Anvendelsen af matematik. Newton.

Arbejde med projektemnerne: 8 moduler

Gruppens beslutninger, herunder lektier nedfældes på et logbogsblad og afleveres efter modulet.

HUSK: Der er lektier til hver gang.

Start timen med at gennemgå lektierne og spørgsmål til dem. Individuelle arbejdsopgaver gennemgås for de øvrige i gruppen.

Produkt: Rapport på maksimalt 10 sider, som giver en fyldestgørende behandling af problemformuleringen og omfatter kravene under den enkelte projektopgave

1 Hvert gruppemedlem skal bidrage med en underskrevet del. Alle i gruppen skal være inde i det stof gruppen som helhed har arbejdet med.

2 Der skal være en præcis litteraturliste over anvendt materiale, herunder de sider, som hører med til gruppens pensum inden for projektopgaven.

3 Der skal være tydelig kildeangivelse

Projektemner:

1. Det frie fald: Bevægelse på en faldrende, Brachistocroneproblemet: Problemformulering:

Hvordan efterviser Galilei loven om et frit fald? Hvilke udledninger er nødvendige for eftervisningen, hvilke idealiseringer er nødvendige, og hvordan kan udledningerne eftervises? Hvilke overvejelser gør Galilei sig vedrørende Brachistocrone problemet? Hvilken betydning for udviklingen af verdensbilledet har Galileis fysik?

Rapporten skal omfatte følgende:

- En teoretisk udledning af en hypotese for: 1) fri bevægelse på en faldrende med hældningsvinkel α og: 2) en lignende udledning for fri bevægelse på en faldrende med begyndeshastighed. En beregning af afstanden mellem ”klokkerne” på Galileis faldrende.
- Galilei argumenterer for, at en fri bevægelse langs en korde i en cirkel (endende i den lodrette diameters skæringspunkt med cirklen) tager samme tid som et frit fald langs den lodrette diameter. Benyt dette til beregning af sammenhængen mellem tyngdeaccelerationen g i det frie fald og accelerationen g_α i en fri bevægelse langs en faldrende med hældning α .
- En beskrivelse af brachistocrone problemet og forskellige løsninger på det

- Beskrivelse af et eksperiment, som kan bruges til at bekræfte eller forkaste jeres resultater.
- En beskrivelse af den naturvidenskabelige arbejdsmetode i relation til jeres arbejde.

2. Cirkelbevægelse: Månens bevægelse og acceleration: *Problemformulering: Hvorfor er det svært at forstå månens bevægelse efter Aristoteles' fald? Hvordan kan man give en matematisk beskrivelse af månens bevægelse, og løser en sådan de forståelsesproblemer, som opstod med Aristoteles' fald?*

Rapporten skal omfatte:

- en beskrivelse af månens bevægelse, når denne opfattes som en jævn cirkelbevægelse, og beskrivelsen forudsætter ¹⁾ Galileis uafhængighedsprincip, ²⁾ Galileis beskrivelse af det frie fald samt ³⁾ antagelsen, at månens bevægelse er et frit fald ind mod jorden. Denne beskrivelse skal bygge på geometriske argumenter.
- en udvidelse af beskrivelsen af månens cirkelbevægelse til beskrivelsen af jævne cirkelbevægelser generelt.
- en beskrivelse af en jævn cirkelbevægelse ved hjælp af trigonometriske funktioner, herunder en bestemmelse af hastighed og acceleration i en sådan bevægelse.
- en beskrivelse af en iagttagelse eller et eksperiment, som kan verificere eller forkaste et eller flere af jeres resultater

3. Keplers love: *Problemformulering: Hvordan kan man argumentere for Keplers love? Hvilke idealiseringer indgår der i argumentationen? Hvordan kan argumentationen verificeres?*

Rapporten skal omfatte

- argumenter for K2: arealloven og K3: loven om, at forholdet mellem planeternes middelfastand i tredje og tidens kvadrat er konstant. Argumenterne må gerne gøres mere generelle, så arealloven kommer til at handle om centralbevægelser generelt, og loven om afstanden i tredje og tidens kvadrat kommer til at handle mere end ét satellitsystem.
- bevis for, at arealloven gælder i en jævn cirkelbevægelse samt for et legemes bevægelse langs en ret linje m med konstant hastighed, hvor arealet måles fra et givet fast punkt T uden for linjen
- en beregning af radius i den cirkel, som en satellit skal anbringes i, hvis den skal være stationær over et fast sted på ækvator
- evaluering af jeres udledninger og forudsætninger, dvs.
- en beskrivelse af en iagttagelse eller et eksperiment, som kan verificere eller forkaste mindst én af jeres påstande eller resultater
- en diskussion af, hvilken status jeres forudsætninger/resultater vil opnå afhængigt af de mulige udfald af det foreslåede eksperiment/iagttagelse
- en beskrivelse af de væsentligste idealiseringer, I har foretaget for at kunne nå frem til en matematisk beskrivelse

Endvidere skal der i rapporten indgå en omtale af Keplers opfattelse af

1) universet, 2) anvendelsen af matematik i naturbeskrivelsen og 3) Guds rolle. Se evt.

<http://www.geometer.dk/gymnasie/>

4. Newton: Universel gravitation: Problemformulering: *Hvordan kan man argumentere for loven om universel gravitation? Hvordan kan loven bekræftes, og hvad betyder loven for opfattelsen af verden?*

Rapporten skal omfatte

- en udledning af accelerationen i en planets bane omkring solen på grundlag af Keplers love, Galileis uafhængighedsprincip og beskrivelse af det frie fald samt den antagelse, at planeternes bevægelse er et frit fald ind mod solen
- en udvidelse af argumentet til andre satellitsystemer
- en slutningsrække, der fører fra a) og b) til loven om universel gravitation
- en beskrivelse af en iagttagelse eller et eksperiment, som kan bekræfte eller forkaste mindst én af jeres påstande eller resultater

Eksempel 250

Fourieranalyse og lyd

- et samarbejde mellem matematik, musik og evt. fysik

Formål: Skabe forståelse for de trigonometriske funktioners betydning i lydlæren, matematikken bag flerklange og støj og et frekvensspektrum. Forklare matematikken bag equalizere og støjfiltre.

Java-appletten på websiden (teksten springes i første omgang over):

http://www.nst.ing.tu-bs.de/schaukasten/fourier/en_idx.html

introduceres. Eleverne eksperimenterer med lyden af overlejrede sinusfunktioner, bl.a. med alle koefficienter = 0, på nær $b_4 = b_5 = b_6 = 4$, som giver en dur-treklang. (Bemærk at førsteaksens enheder er $\pi/4$). Eleverne lærer hvordan $b \cdot \sin(k \cdot t)$ svinger k gange på tiden 2π med amplituden b

Java-appletten på websiden:

<http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/sound/sound.html>

For $f = 220$ Hz forsøges som ovenfor, bl.a. Septim-firklangens med koefficienterne $b_4 - b_7$ til $\sin(4f)$ op til $\sin(7f) = 0,9$ (resten 0) og 9-femklangen med yderligere $\sin(9f) = 0,9$.

Forsøg med $b_1 = 1$, $b_3 = 1/3$, $b_5 = 1/5$, $b_7 = 1/7$ osv.: Firkantimpuls. "Overdrive"-lyd.

Forsøg med $b_1 = 1$, $b_2 = 1/2$, $b_3 = 1/3$, $b_4 = 1/4$ osv.: Savtakimpuls.

På Java-appletten på websiden:

<http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/OTHERS/fourier2/index.html>

afprøves "Sawtooth" og "Noise". På "Noise" afprøves med 10, 40 og 100 led (koefficienter $\neq 0$).

Eleverne skulle hermed gerne nå til erkendelsen af, at alle periodiske (lyd-)funktioner kan opløses i en Fourier-række. Begrebet Frekvensspektrum/Fourierspektrum introduceres.

I fysik kan evt. snorsvingninger med overtoner eller lydsvingninger i et resonansrør undersøges. Med f.eks. Pasco-apparatur kan svingninger på en guitar-streng og klangfarver analyseres m.h.t. overtoner og frekvensspektrum.

I musiklokalet optages en wav-fil, idet man bevidst får en hyletone med.

I lydbehandlingsprogrammet laver man en Fourier-analyse af et udsnit af filen: (Analyze > Frequency analysis) og hyletonen identificeres. Denne fjernes nu fra lydfilen v.h.j. a et Fast Fourier Transformation-filter (Transform > Filters > FFT-filter) hvor man med musen klikker og trækker i equalizer-grafen, så der slukkes for lyden i hyletonens frekvensområde.

Med FFT-filteret equaliseres lyden (ex, sættes mere bas på, fjernes mellemtone "pap-lyd").

Omfang af forløbet: 3-12 lektioner især alt efter niveauet man udfolder matematikken på..

Arbejdsform: Grupper på 2 med rapport (med skærmdumps) og før/efter wav-filer som produkt.

Litteratur con amore, ovennævnte java-appletter og free-ware versionen af CoolEdit 2000.

Eksempel 260

Jordskælv

- et forløb til A-niveau, evt. i samarbejde med naturgeografi, med fysik eller som en del af almen studieforberedelse

Formål: At opnå indsigt i modellering med anvendelse af infinitesimalregning i opstilling og løsning af differentiallyigningsmodeller, samt i anvendelse af matematik på et komplekst problem.

Forudsætninger: Holdet har arbejdet med kernestoffet vedrørende differentiallyigninger og er blevet præsenteret for den anden afledede som et mål for acceleration, og dermed forbundet med begrebet kraft, specielt tyngdekraften. Eller holdet har i fysik behandlet Newtons love.

Fagligt stof og arbejdsform:

Jordskælv er meget komplekse fænomener. På det overordnede plan har man i dag en vis indsigt i, hvad et jordskælv er og årsagen til de opstår. Men man er langt fra at kunne forudsige jordskælv og dermed tage akutte forholdsregler. Derimod kan man matematisk modellere, hvorledes jordskælv udbreder sig og påvirker bygninger, broer mv.

En matematisk modellering indeholder altid en række antagelser og idealiseringer. Forløbet om jordskælv er eksemplarisk i denne henseende.

Forløbet er tilrettelagt som et projektforsløb, hvor eleverne selv når frem til at forstå de grundlæggende problemer vedrørende resonans mellem jordskælvets svingninger og bygningers egensvingninger.

Gennemføres forløbet sammen med naturgeografi kan projektet bygges sammen med et egentligt geologisk studium af jordskælv.

Den afsluttende præsentation kan være en rapport eller en poster om jordskælv, matematisk modellering og ideen bag jordskælvssikring af bygninger i udsatte områder. Sådanne posters kan ledsages af korte præsentationer fra grupperne.

Materiale: Et projektoplæg om emnet er placeret på [emu'en](#).

Eksempel 270

Rum og dimension – om Abbott Abbotts Flatland

- et samarbejde i almen studieforberedelse eller mellem matematik og engelsk

Indhold og problemformuleringer: Hvordan oplever vi rummet? Hvad gør rumopfattelsen ved os? Kan vi forestille os, at rummet kunne se anderledes ud, end vi tror? Kan vi forstå, hvad et krumt rum er? Kan vi leve i et krumt rum? Kan vi opdage, at vi lever i et sådant rum? Hvad er den fjerde dimension?

Det er lettere at få et indtryk af disse spørgsmål, når man bevæger sig en dimension ned fra den 3 dimensionale verden: Hvordan ville livet i Flatland være? Hvordan ville fladlænderne opleve hinanden? Hvordan ville de opleve krumningen, hvis de levede på en kugle? Her er det så heldigt, at E. Abbott Abbott har givet sin version af livet i Flatland i bogen med samme titel. Bogen er en science fiction roman fra 1884. I denne version af Flatland er mændene polygoner eller cirkler, mens kvinderne er nåle. Hvordan kender man forskel på en mand eller en kvinde i dette univers? I Abbotts udgave af Flatland er der regler for det sociale liv (som selvfølgelig afspejler problemer ved de sociale regler i England omkring 1880). Der er også besøg i landet med en dimension mindre, Lineland, og der kommer besøg fra landet, der har en dimension mere, Spaceland. Fra Flatland er der mange veje at gå: Geometrien på en kugle, Gauss' forsøg på ved måling at afgøre, om vi lever i et krumt rum. Kants erkendelsesformer, hvor det apriorisk ligger fast, at vi lever i et euklidisk rum, den hyperbolske geometri, Den frisættende betydning af opdagelsen af de nye geometrier (sfærisk, hyperbolsk og mange flere) omkring 1850 (HC Hansen:), Rudy Rucker: Den fjerde dimension.

Niveau: A, B.

Timeforbrug: Det er svært at sætte et præcist antal timer på. Det hele afhænger af, hvor meget man vil tage med, bl.a. om man vil læse hele Abbotts bog eller kun uddrag. Så forbruget kan være alt fra 5 moduler á 95 minutter til 12 sådanne moduler.

Samarbejds muligheder: Kunne være et forløb i Almen studieforberedelse. Mulige samarbejdspartnere: Engelsk.

Undervisningsmateriale:

1) Edwin A. Abbott: *Flatland*, Penguin Books 1987, Classic Science Fiction, Skrevet 1884 (Humor, satire, logik, alt kombineret i en fantastisk underholdende klassiker om den fjerde dimension)

2) Rudy Rucker: *The fourth dimension*, Houghton Mifflin Company Paperback, 1984

3) Stewart, I. : *Flatterland – Like Flatland Only More So*, (2001).

4) Davis, P. J. & Hersh, R. : *The Mathematical Experience*, (1981), s. 400-406.

5) Lewis Carroll: *Alice in Wonderland*

<http://etext.lib.virginia.edu/toc/modeng/public/CarAlic.html>

<http://falcon.jmu.edu/~ramseyil/carroll.htm>

Lewis Carroll Homepage: <http://www.lewiscarroll.org/carroll.html>

6) R. Newman: *The world of Mathematics*, Vol.4, p2375-2386, Lewis Carroll and What the Tortoise Said to Achilles and Other riddles.

7) <http://www.eldritchpress.org/ea/FL.HTM>

8) <http://www.alcyone.com/max/lit/flatland/>

Eksempel 273

Risikovurdering – med eksempler fra store katastrofer som Three Miles Island og Challenger - et samarbejde i almen studieforberedelse eller mellem matematik og engelsk

Hvad skete der, da den ene reaktor på Three Miles Island begyndte at løbe løbsk i 1979? Hvordan blev hændelsesforløbet beskrevet fra dag til dag (Washington Post). Hvordan reagerede politikere, administratorer, befolkning? Hvordan vurderer man risikoen for en ulykke eller katastrofe? Var det, der skete på Three Miles Island, beskrevet i den store risikovurdering vedrørende atomkraft, Rasmussen Rapporten, som blev udarbejdet i begyndelsen af 1970'erne? Hvilken sandsynlighed tillagde man i givet fald hændelsen? Hvilke konsekvenser havde katastrofen for mennesker? Skal man opgive risikovurdering? Kan vi undvære dem? Foretager vi ikke hele tiden risikovurderinger? Hvilken vurdering ledsager vores handlinger? Skal vi - i lyset af ulykkerne i 2004 - tage med "snebussen" gennem Tyskland, eller skal vi hellere tage en privatbil, toget eller flyet? Hvordan blev risikoen ved opsendelsen af Challenger vurderet? Hvad skete der?

Timeforbrug: 6 – 10 moduler á 95 minutter.

Samarbejdsmuligheder: Engelsk, Fysik, Samfundsfag.

Materiale:

- 1) Film: Kina syndromet, der jfr. nedenstående link blev vist for at få reportere til at forstå, hvad der skete på Three Miles Island
- 2) FC,JT,PP: Sandsynlighedsregning og statistik, Munksgaard, 1990
- 3) <http://www.washingtonpost.com/wp-srv/national/longterm/tmi/whathappened.htm>
Dag til dag beskrivelsen af, hvad der skete.
- 4) <http://www.pbs.org/wgbh/amex/three/tguide/index.html>
- 5) http://www.ki4u.com/three_mile_island.htm
- 6) <http://www.world-nuclear.org/info/inf36.htm>
- 7) I hæftet: 'Challenger ulykken' er der et læremateriale med diskussion af begreber og metoder. Statistik-programmet Fathom kan inddrages i undersøgelsen.

Eksempel 280

Sammenligning af to måleserier

- et eksempel på et forløb indenfor emnet statistik

'Sammenligning af to måleserier' er et eksperimentelt projekt, der handler om deskriptiv statistik udbygget med en simpel hypotesetest. Udgangspunktet er et autentisk datamateriale, fx en undersøgelse af elevernes reaktionstider. De eksperimentelle data fremstilles grafisk på forskellig vis. Herunder bør man diskutere middelværdi og median, samt diskutere deres fordele og ulemper. Denne første del er rent deskriptiv og kan fx munde ud i kåringen af klassens hurtigste elev. I projektets anden del skal klassen sammenligne to måleserier, fx for at afgøre om der er forskel på piger og drenges reaktionstid. Klassen diskuterer i fællesskab mulige teststørrelser, og der vælges en bestemt teststørrelse, fx forskellen mellem medianerne for de to grupper. Scramblings-metoden introduceres, fx via et historisk datamateriale, hvorefter måleserierne scrambles og man finder eksperimentelt fordelingen for teststørrelsen. Dette kan med fordel først gøres i hånden (hvor man samler klassens resultater, idet hver elev fx håndscrambler 4 gange ved at blander kort med de observerede værdier) og derefter på maskine. Derefter diskuteres det i fællesskab om den observerede forskel er rimeligt sandsynlig eller højst usandsynlig (eller midt imellem), og hvad konklusionen bliver.

Mål: at tilgodese kravet om at eleverne skal kunne arbejde med – simple statistiske metoder til håndtering af et datamateriale, grafisk præsentation af et statistisk materiale, simple empiriske statistiske deskriptorer.

Niveau: Projektet egner sig til grundforløbet. Der er muligheder for senere at vende tilbage til eksperimentet på de højere niveauer i forbindelse med mere avancerede overvejelser om hypotesetest med baggrund i teoretisk sandsynlighedsregning. Fx kan scramblings-metoden sammenlignes med kanoniske tests som det parametriske t-test eller det ikke-parametriske Mann-Witney test.

Samarbejdsmuligheder: Projektet kan afvikles i matematik, men kan også indgå i et samarbejde med fx naturvidenskabeligt grundforløb eller samfundsfag C omkring beskrivelse og test af datasæt.

Arbejdsformer og tidsforbrug: 6×45 minutter

Eksperimentet med den deskriptive del tager typisk en dobbelttime, men kan sagtens udvides med en mere generel undersøgelse af fx middelværdien og medianen. Hypotesetesten kræver tilsvarende som minimum en dobbelttime med introduktion af scramblingsmetoden, samt elevernes gennemgang af deres egne måleserier. Dertil kommer efterbehandlingen af elevernes resultater.

Anvendelse af it og værktøjsprogrammer: Det er oplagt at skrive rapport om såvel eksperiment som hypotesetest med brug af det statistikværktøj, man alligevel vil benytte i det daglige, fx regnearket Excel, statistik- og modelleringsprogrammet Fathom, eller CAS-programmet TI-Interactive. Det er ikke alle programmer, der er født med en scramblings-kommando (der kan udføre en tilfældig permutation af en liste), men de kan udvides med små programmer, der klarer denne del af sagen. Grafiske lommeregnerne kan glimrende bruges til den deskriptive del, men vil være for langsom til omfattende realistiske scramblings.

Undervisningsmaterialer: Eksperimentet om reaktionstid med tilhørende elevinstruktion er beskrevet i detaljer i hæftet 'Hvem er den hurtigste'. Et tilsvarende historisk eksempel er

gennemgået i hæftet: 'Challenger ulykken'. Der er tale om lærermaterialer med diskussion af begreber og metoder. Man kan efter behov supplere med noter om elementær deskriptiv statistik omhandlende medianer, kvartiler, boksplosts mm.

Eksempel 294

Matematiske modeller og SD-diagrammer

SD-diagramteknikken (System Dynamics) opstod i forbindelse med udarbejdelsen af den model, der ligger til grund for ”Grænser for vækst” og er en simpel måde at opstille et grafisk diagram til illustration af sammenhænge i et dynamisk system. Når diagrammet først er opstillet, kan man meget nemt udarbejde et regneark, der løser modellen efter Eulers metode, og viser løsningerne som grafer af modellens variable. Her kan man variere indgående konstanter værdi og straks se ændringerne grafisk. Man kan også vælge at opstille de differentiallyigninger, der beskriver modellen, ud fra diagrammet, og så eksempelvis anvende CAS-værktøjer til at løse disse. Selve SD-diagramteknikken er så enkel, at den nemt kan tilpasses matematikundervisningen på alle niveauer.

Mål: - kunne analysere givne matematiske modeller og foretage simuleringer og fremskrivninger
- differentiallyigningsmodeller, herunder både opstilling, anvendelse og løsning af differentiallyigninger
- anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer.

Niveau: Meget velegnet på A-niveau til introduktion af differentiallyigningsmodeller og på B-niveau som introduktion til fortolkning af differentialkvotient og opstilling af modeller med differentiallyigninger,

Samarbejds muligheder: Forløbet kan afvikles i et samarbejde med andre naturvidenskabelige fag, der benytter dynamiskes modeller. Fx radioaktive isotoper i fysik, modeller for økosystemer i biologi, fx fiskerimodeller, modeller for befolkningsudvikling og levevilkår i samarbejde med naturgeografi og samfundsfag, modeller for grundvandsstrømninger i samarbejde med geografi, reaktionskinetik i kemi.

Arbejdsformer og tidsforbrug: Arbejdet med SD-diagrammer lægger op til, at eleverne selv arbejder med forskellige simple modeller først inden de kastes ud i større modelopbygninger. Herved trænes de at udvælge relevante variable til beskrivelse af det fænomen, der modelleres. Dette udtrykkes i de såkaldte ”kasser” i SD-diagrammerne. Flow’et mellem de forskellige kasser indføres i modellen som ”strømningspile” og flowhastigheden præsenteres af de såkaldte ”haner” i diagrammet. Modellens grænseflade til omgivelserne præsenteres af ”skyer” og endeligt indføjes sammenhænge mellem de forskellige størrelser. Dette introduceres i et konkret eksempel og eleverne arbejder så med at opstille modeller selv enten over selvvalgte fænomener eller fænomener, som læreren har udvalgt. Det kunne være: spredning af en sygdom, radioaktive henfaldskæder, udvikling af en population bestående af tre aldersklasser: børn, fertile voksne, voksne over den fertile alder, rygtespredning, økosystemer med rovdyr og byttedyr, modeller for vækst af et dyr (vækstmodeller for fisk). Når modellerne og opstillet i SD-diagrammer overføres de til regneark/CAS-værktøjer og løses. Forløbet kan i matematik afsluttes med at eleverne fremlægger deres model og resultater og samtidig forholder sig kritisk til modellens begrænsninger.

Anvendelse af værktøjsprogrammer: Anvendelse af regneark og CAS-værktøjer er nødvendigt.

Undervisningsmaterialer: Der er flere gode introduktioner til SD-diagrammer, fx ”Manhattan Projektet” (Munksgaard 1994) hvor diagramteknikken anvendes på radioaktive isotoper, men som udmærket kan bruges til blot at introducere selve SD-symbolikken.

Eksempel 304

Hvornår er det sandt - Arven fra Euklid

- et forløb i almen studieforberedelse om bevisførelse og argumentation

I alle fag spiller evnen til at kunne argumentere klart for en påstand eller et synspunkt en væsentlig rolle. Kravet til klarhed i argumentation og til præcision i formulering er med til at konstituere overgangen fra skoleelev til gymnasieelev. I dansk kan det dreje sig om argumentation for en tekstanalyse, i matematik om de logiske slutninger i beviser. Emneforløbet kunne tage udgangspunkt i en gennemgang af eksemplariske cases fra historie, litteraturvidenskab, retsvidenskab, samfundsfag, filosofi, fysik, matematik, hvor der argumenteres for sandhedsværdien af bestemte udsagn - og der kunne med fordel inddrages cases med falsk argumentation. Eksemplerne danner baggrund for en udforskning af kategorier som ræsonnement, sandsynliggørelse, bevis, overtalelse, trussel, med inddragelse af nogle af retorikkens kategorier. Hvad skal der til for at noget opfattes som korrekt? Hvad vil det sige at en påstand er sand. Er matematikkens påstande sande? Er fysikkens? Hvad er fælles og hvad er forskelligt i de forskellige videnskabers sandhedsbegreb. Forløbet inddrager en fordybelse i historiens første eksempel på en stringent matematisk tankegang.

Mål

Klar logisk argumentation og bevisførelse hører til kernefagligheden i stort set alle gymnasiets og hf's fag og udgør et af de helt centrale elementer i udviklingen af eleven/kursisten mod et højere fagligt niveau. Formålet med forløbet er at lade eleverne/kursisterne udforske, hvilken rolle bevisførelsen spiller for argumentation inden for matematikken (såvel som andre fagområder). Hvad konstituerer et bevis? Hvornår er noget bevist? Hvordan adskiller matematiske beviser sig fra argumentation inden for andre fagområder? Og hvad betyder bevisførelse for et arguments sandhedsværdi? Et kendskab til, hvad der konstituerer et godt bevis eller en sand argumentation, vil lette elevens videre vej både gennem matematikken og naturvidenskabens stringente univers, men vil også hjælpe eleven til at analysere styrker og svagheder inden for argumentationer i humanistiske og samfundsfaglige fag.

Niveau

Forløbet kan tilrettelægges både for C-niveau på hf og i gymnasiet og på højere niveauer.

Samarbejdsmuligheder

Den euklidiske tankegang genfindes hos Platon og mange senere filosoffer, hvorfor et samarbejde med filosofi er en anden mulighed.

Argumentation er en central del af forløbet, og derfor vil det være muligt at tilrettelægge forløbet i samarbejde med dansk.

Arbejdes med materialer fra Internettet, vil det være en mulighed at samarbejde med engelsk.

Arbejdsformer

Forløbet kan tage udgangspunkt i små klassiske former for bevisførelse indenfor matematikken, filosofien og evt. andre emneområder. Eksempler på sådanne matematiske beviser kunne være beviset for Pythagoras læresætning, beviset for den konstante vinkelsum i en trekant eller tilsvarende. Uden for matematikken finder vi for eksempel gudsbeviserne hos Anselm af Canterbury og Thomas Aquinas. Og andre mulige eksempler finder vi hos fortidens store rationalister Descartes, Spinoza og Leibniz, der alle benyttede sig af Euklids metodik.

Andre, og mere tidssvarende, former for argumentation eller bevisførelse fra avisartikler, tv-udsendelser el. lign. bør også anvendes.

Eleverne laver på baggrund heraf et udkast til en form for leksikalsk artikel om begreber som *bevis* og *argumentation* indenfor forskellige fagområder.

I matematik fordyber man sig dernæst i Euklids Elementerne. Eleverne/kursisterne arbejder selvstændigt fx i grupper. Man kan give grupper forskellige arbejdsopgaver som fx:

- Fremlæggelse af de 23 definitioner med overvejelser over, om de er dækkende.
- Fremlæggelse af de 5 generelle aksiomer og de 5 forudsætninger for geometrien med overvejelser over, hvorfor netop de er valgt.
- Fremlæggelse af udvalgte sætninger.

Grupperne vil kunne fremlægge mundtligt for hinanden.

Der udformes et færdigt udkast til den leksikalske artikel.

Timeforbrug

Timeforbruget i matematik vil være 10-12 timer.

Anvendelse af it

Det vil være en oplagt mulighed at inddrage et dynamisk geometriprogram til at illustrere indholdet. Dette vil dog kræve større timeforbrug, hvis geometriprogrammet skal introduceres.

Undervisningsmaterialer

- Euklids elementer findes på engelsk på følgende hjemmeside med udførlig guide med appletter, der beskriver definitioner, aksiomer og sætninger:
- <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>.
- Euklids elementer I-II.

Yderligere materialer til inspiration kan fx hentes i:

Thielst, P.(2002): *Man bør tvivle om alt – og tro på meget*. (Det lille forlag), Davis & Hersh (1981): *The Mathematical Experience*, (Birkhäuser), Harbsmeier m.fl. (1999): *Filosofi - Fra antikken til vor tid* (Systeme).

Eksempel 305

Centralperspektiv og værdiperspektiv

- et samarbejde mellem matematik og andre fag i almen studieforberedelse

Et emneforløb om renæssancen kunne sætte fokus på forholdet mellem individ og samfund. Der kunne tages udgangspunkt i den sorte død og forholdet mellem religion og civilsamfund. Eller vægten kunne lægges på at undersøge baggrunden for de norditalienske bystaters opblomstring og for de nye forestillinger om ”den gode og den dårlige regering”. Hovedparten af emneforløbet skulle anvendes til at undersøge spørgsmål som: Hvilken rolle spillede genopdagelsen af antikken og den gryende videnskabelige selvbevidsthed for den kunstneriske udvikling fra værdiperspektiv til centralperspektiv? Hvordan malede man i middelalderen? Hvad prøvede man at fremstille? Hvorfor begyndte ønsket om at gengive det, man ser? Hvilken rolle spillede religionen? Hvordan nåede man frem til en ny malestil, hvorefter det at male i højere grad kom til at handle om at se? Hvilke regler er der for perspektivtegning? At se er også at undersøge verden? Er det naturvidenskab at male? Hvilken rolle spillede ændringen i malekunsten i overgangen fra Aristoteles’ verdensbillede til Newtons? Der kunne i emneforløbet arbejdes med billedanalyser, læses primærtetekster, ligesom en studietur naturligt kunne indgå.

Deltagende fag kunne være:

Matematik, dansk, billedkunst, religion, italiensk, samfundsfag, historie, oldtidskundskab.

Indhold i matematik:

Et forløb om perspektivgeometri. Evt. med inddragelse af læsning af sider fra Albertis eller andre klassiske fremstillinger af reglerne for at tegne perspektivisk.

Arbejdsformer:

Efter en introduktion fra de deltagende fag arbejdes med projekter. De deltagende fag laver fælles oplæg hertil.

Eksempel 400

Liste over gennemførte forløb. A-niveau. Skabelon.

Sampil med andre fag	
1.	
2	
3	
4	
Almen studieforberedelse	
5	
6	
7	
Matematik	
8	
9	
10	
Kursusforløb	
11	
12	
13	

Gennemførte undervisningsforløb til mundtlig eksamen (til brug for læreren og censor). A-niveau. Skabelon.								
Forløb →								
Faglige mål 2.1 ↓								
Variable								
Statistik								
$f(x)$ og $f'(x)$								
$\int f(x)dx$ og differentiaalligninger								
Geometriske modeller								
Ræsonnement og bevisførelse								
Anvendelse af matematik								
Historisk, videnskabelig, kulturel udvikling								
IT								

Liste over gennemførte forløb. A-niveau. Eksempel 1.

Samspil med andre fag	
1.	Arvelighed. Betingede sandsynligheder og Hardy-Weinberg.
2	Vækstmodeller
3	Fiskerimodeller
4	Retsgenetik
Almen studieforberedelse	
5	Pythagoræerne
6	Fedme og kolesterol
7	...
Matematik	
8	Euklid
9	Kunst, arkitektur og matematik. Det gyldne snit og fibonaccital.
10	...
Kursusforløb	
11	Trigonometri
12	...
13	...

Gennemførte undervisningsforløb (til brug for læreren) A-niveau.												
Forløb →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
Faglige mål 2.1 ↓												
Variable		x	x						x		x	
Statistik	x	x	x	x								
$f(x)$ og $f'(x)$		x	x									
$\int f(x)dx$ og differentialligninger		x	x									
Geometriske modeller					x		x	x	x		x	
Ræsonnement og bevisførelse		x	x		x		x	x	x		x	
Anvendelse af matematik	x	x	x	x	x			x	x		x	
Historisk, videnskabelig, kulturel udvikling	x				x			x	x			
IT		x	x					x	x			
Supplerende stof 2.3												
differentialligningsmodeller		x	x									
Statistiske modeller	x			x								
Matematikhistorisk projekt					x		x					

Liste over gennemførte forløb. A-niveau. Eksempel 2.

Samspil med andre fag	
1.	Opinionsmålinger. Statistiske metoder, indsamling af data, spørgeskemaer
2	Makroøkonomiske modeller. Vismandsspillet.
3	Risikovurderinger// Challenger/Rasmussen rapporten.
4	Optimering af en produktion, herunder lineær programmering
Almen studieforberedelse	
5	Forestillinger om rummet. Abbot Abbot: Flatland, Lewis Carroll, Kant, Gauss
6	Billedanalyse, herunder perspektivtegning og det gyldne snit
7	Renæssancen
8	Undersøgelse, hypotesedannelse, argumentation, bevis
Matematik	
9	Vækstmodeller
10	Eksperimentel tilgang til tangentbegrebet og $f'(x)$
11	At studere $f'(x)$: Udledning af $h'(x)$, når $h(x)=(f(x))^2$, $h(x)=1/f(x)$, $h(x)=(f(x))^{1/2}$ osv. At få styr på polynomiers grafer ved hjælp af monotonundersøgelse
Kursusforløb	
12	Geometri og trigonometri
13	Differentialregning
14	...

Gennemførte undervisningsforløb (til brug for læreren) A-niveau.												
Forløb →	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Faglige mål 2.1 ↓												
Variable		x		x	x	x	x		x	x	x	x
Statistik	x		x					x				
$f(x)$ og $f'(x)$		x	x	x			x		x	x	x	
$\int f(x)dx$ og differentialligninger		x							x			
Geometriske modeller					x	x						x
Ræsonnement og bevisførelse	x					x		x		x	x	x
Anvendelse af matematik	x	x		x	x	x	x		x			
Historisk, videnskabelig, kulturel udvikling			x		x	x						
IT	x	x							x			
Supplerende stof 2.3												
differentialligningsmodeller		x							x			
Statistiske modeller	x		x									
Matematikhistorisk projekt					x		x					

Eksempel 410

Eksempel på eksamensspørgsmål til mundtlig eksamen efter model a)

Arvelighed

Chi²-test og Hardy-Weinberg

Statistik

Opinionsundersøgelser

Differentialregning

Monotoniforhold, herunder en uddybende redegørelse for polynomiers grafer, antal skæringspunkter med 1.aksen og antal lokale ekstrema.

Differentialregning

Udledning af mindst 3 regneregler, herunder produktreglen.

Differentialregning

Udledning af differentialkvotienten for $f \cdot f$, \sqrt{f} , $\frac{1}{f}$, når f er en differentiabel funktion.

Differentialregning

Maksimums- og minimumsbestemmelse og matematiske modeller

Differentialligninger

Ligningerne $\frac{dy}{dx} = ky$, $\frac{dy}{dx} = b - ay$, $\frac{dy}{dx} = y(b - ay)$.

Differentialligninger

Fiskerimodeller

Differentialligninger

Lineære differentialligninger af 1. orden.

Geometri og vektorer

Udledning af sin- og cos-relationerne

Geometri og vektorer

Linje i plan samt linje og plan i rummet

Renæssancen

Galileis beskrivelse af det frie fald og det skrå kast og Galileis rolle i ændringen af verdensbilledet i renæssancen.

Renæssancen

Den naturvidenskabelige arbejdsmetode og matematikkens rolle.

Eksempel på eksamensspørgsmål til mundtlig eksamen efter model b)

Arvelighed

Du skal gøre rede for Mendels eksperimenter, og hvordan man statistisk håndterer sådanne eksperimenter. Endvidere skal du redegøre for, hvilken betydning Mendels eksperimenter har for behandlingen af den valgte problemformulering.

Arvelighed

Der ønskes en redegørelse for den valgte problemstilling. Redegørelsen skal omfatte en udledning og anvendelse af Hardy-Weinbergs lov.

Arvelighed

Der ønskes en redegørelse for den valgte problemstilling. Redegørelsen skal omfatte en dyberegående behandling af seglcelleanæmi.

Vækstmodeller

Din redegørelse for den valgte problemstilling skal omfatte fortolkning og løsning af mindst en af differentialligningerne $\frac{dy}{dx} = b - ay$, $\frac{dy}{dx} = y(b - ay)$

Vækstmodeller

Din redegørelse for den valgte problemstilling skal omfatte en uddybende redegørelse for to typer af vækstmodeller.

Fiskerimodeller

Din redegørelse for den valgte problemstilling skal omfatte udledningen af den samlede biomasse for en årgang fisk som funktion af tiden.

Fiskerimodeller

Din redegørelse for den valgte problemstilling skal omfatte udledningen af det tidspunkt, hvor den samlede biomasse for en årgang er størst.

Fiskerimodeller

Din redegørelse for behandlingen af den valgte problemstilling skal omfatte løsningen af Bertalanffys differentialligning.

Pythagoræerne

Du skal gøre rede for Pythagoras' sætning, eksistensen af inkommensurable linjestykker samt problemerne vedrørende delelighed og uendelighed, og for hvilken rolle disse ting har spillet i det pythagoræiske verdensbillede.

Pythagoræerne

Du skal gøre rede for den valgte problemstilling. Din redegørelse skal omfatte Euklids bevis for Pythagoras' sætning

Pythagoræerne

Du skal gøre rede for den valgte problemstilling, og redegørelsen skal omfatte eksempler på den nye rolle som matematikken får med pythagoræerne.

Euklid

Du skal gøre rede for den valgte problemstilling, herunder gennemføre mindst to beviser, der illustrerer Euklids fremgangsmåde

Euklid

Du skal gøre rede for den valgte problemstilling, herunder for Euklids videnskabshistoriske betydning.

Euklid

Gør rede for den valgte problemstilling. Redegørelsen skal omfatte Euklids bevis for Pythagoras' sætning

Fibonacci, kunst, arkitektur og matematik

Din redegørelse for den valgte problemstilling skal omfatte en udledning af formelen for Fibonacci-tallene.

Fibonacci, kunst, arkitektur og matematik

Din redegørelse for den valgte problemstilling skal omfatte en udledning af det gyldne snit samt en argumentation for sammenhængen mellem det gyldne snit og Fibonacci-tallene.

Fibonacci, kunst, arkitektur og matematik

Din redegørelse for den valgte problemstilling skal omfatte en argumentation for sammenhængen mellem det gyldne snit og Fibonacci-tallene samt eksempler på anvendelsen af det gyldne snit i arkitektur og kunst.