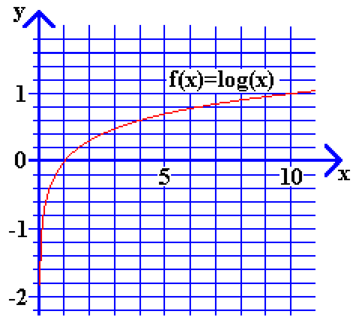
1 Om logaritmefunktionen log

Vi starter med at undersøge logaritmefunktionen ved hjælp af lommeregnerens log-tast. Vi laver en tabel med sammenhørende værdier af x og log(x)

x	0.1	0.5	1	2	4	5	10	20	50	100
log(x)	-1	-0.30103	0	0.30103		0.69897	1			2



og indtegner disse punkter i et koordinatsystem. Grafen ses på figuren til højre.

Det ser ud til, at vi kan beregne log(x) så snart x er et positivt tal. lommeregneren giver fejl, hvis du forsøger at bruge negative tal som x-værdier.
Det vender vi tilbage til senere. Til den tid vil vi sige, at funktionen log har *definitionsmængden* R_+ , og vi vil skrive $Dm(log)= R_+$
De værdier, som vi får beregnet med funktionen log, kaldes på tilsvarende måde funktionens *værdimængde*, og vi skriver $Vm(log)=R$.

2 Regneregler for logaritmer

Ud fra tabellen med sammenhørende værdier af x og log(x) kan vi se, at der må gælde bestemte regneregler for logaritmefunktionen log.

x	0.1	0.5	1	2	4	5	10	20	50	100
log(x)	-1	-0.30103	0	0.30103		0.69897	1			2

Beregn fx log(2) + log(5), og sammenlign med værdien af log(10)

$$\log(2) + \log(5) = 0.30103 + 0.69897 = 1.00000 = \log(10)$$

Opgave 1

Beregn log(3), log(30) og log(300), og find ud af, hvilken sammenhæng der er. (Hemmeligt tip nederst på siden[1])

log(3) =
log(30) =
log300) =

Opgave 2

Gennemfør de følgende beregninger, og prøv at finde en sammenhæng med en anden log-værdi.

a) log(2) + log(5) =
b) log(2) + log(2) =
c) log(2) + log(0.5) =
d) log(2) + log(10) =
e) log(4) + log(5) =
f) log(10) + log(5) =
g) log(10) + log(10) =
h) log(20) + log(5) =

Hvilken konklusion kan du drage? Kan det passe, at log(50) = log(5·10) = log(5) + log(10) osv.?

[1] Kig også på værdien af log(10)

Opgave 3

Gennemfør de følgende beregninger, og prøv at finde en sammenhæng med en anden log-værdi.

a)	log(50) - log(5) =	e)	log(10) - log(5) =
b)	log(5) - log(50) =	f)	log(10) - log(2) =
c)	log(20) - log(5) =	g)	log(4) - log(2) =
d)	log(10) - log(50) =	h)	log(1) - log(2) =

Hvilken konklusion kan du drage? Kan det passe, at log(10) = log(50/5) = log(50) - log(5) osv.?

Opgave 4

Gennemfør de følgende beregninger, og prøv at finde en sammenhæng med en anden log-værdi.

a) log(2) + log(2) = b) log(10) + log(10) =

Hvilken konklusion kan du drage? Kan det passe, at $\log(4) = \log(2^2) = 2 \cdot \log(2)$ osv.?

Sætning 1

Der gælder følgende regneregler for logaritmer

(L1) $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$

(L2) $\log(a / b) = \log(a) - \log(b)$

(L3) $\log(a^n) = n \cdot \log(a)$

Opgave 5

Beregn følgende værdier ved brug af logaritmeværdierne i tabellen på side 1, og sammenlign så med, hvad en beregning på lommeregner giver:

a)	$\log(25) = \log(5 \cdot 5) =$	d)	log(0.05) = log(1/20) = ?
b)	log(1000) =	e)	log(0.01) = ?
c)	$\log(80) = \log(5 \cdot 4 \cdot 4) = ?$	f)	log(0.125) = log(0.5/4) = ?

3 Om funktionerne log(x) og 10^x

Ligesom vi kan se på logaritmefunktionen log(x) kan vi også se på *potensfunktionen* 10^x. Husk, at potensopløftning laves med lommeregnerens $\boxed{\wedge}$-tast.

Opgave 6

Beregn

a)	$3^2 =$	d)	$10^2 =$
b)	$3^3 =$	e)	$10^{0.5} =$
c)	$3^4 =$	f)	$10^{1.234} =$

Sætning 2

Når log(x) = c, så er $10^c = x$

Vi skal ikke bevise denne sætning, men vi kan undersøge, om taleksempler passer.

Vi har jo følgende tabel med sammenhørende værdier af x og log(x)

x	0.1	0.5	1	2	4	5	10	20	50	100
log(x)	-1	-0.30103	0	0.30103		0.69897	1			2

Nu kan vi prøve at "regne baglæns", altså at gå fra y-værdierne (i værdimængden for log) til x-værdierne (i definitionsmængden for log). Vi beregner fx

$$10^{-0.30103} = 0.499999995 \sim 0.5$$

Når de beregnede værdier afrundes passende, kommer tabellen til at se således ud:

x	-1	-0.30103	0	0.30103	0.60206	0.69897	1	1.30103	1.69897	2
10^x	0.1	0.5	1	2	4	5	10	20	50	100

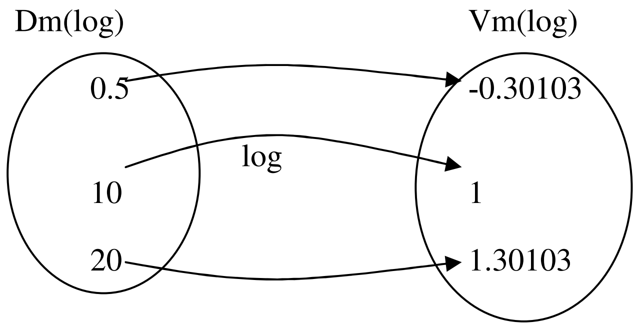
Hver eneste gang passer det:

Når log(0.5) = -0.30103, så er $10^{-0.30103} = 0.499999995 \sim 0.5$, osv.

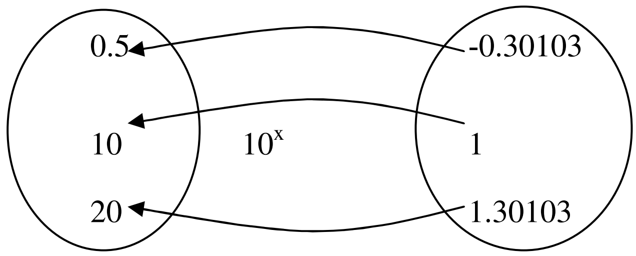
Denne særlige egenskab ved de to funktioner log(x) og 10^x skal vi se mere på senere.

4 Om definitionsmængde og værdimængde

Vi kan tegne definitionsmængden og værdimængden for logaritmefunktionen på denne måde:



Med udgangspunkt i tabellen ovenfor kan vi også tegne således:



Her kan vi se, hvordan de to funktioner er "hinandens modsatte" eller "hinandens omvendte", og vi kan se, at

$$\log(0.5) = -0.30103, \text{ og videre } 10^{-0.30103} = 0.5$$

I det sidste udtryk kan vi indsætte log(0.5) i stedet for -0.30103, så får vi

$$10^{\log(0.5)} = 0.5$$

generelt gælder der:

Sætning 3

$$\log(10^x) = x$$

5 Om løsning af ligningen $10^x=c$

Nu skal vi prøve at løse ligninger af typen $10^x=c$. Vi starter med et eksempel.

Eksempel

Løs ligningen $10^x=3$

Det gør vi ved at "tage log på begge sider af lighedstegnet". Så får vi

$10^x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \log(10^x) = \log(3)$

Nu kan vi bruge sætning 3, $\log(10^x) = x$. Så får vi

$\Leftrightarrow \quad x = \log(3) \sim 0.47712$

Bagefter kan vi gøre prøve ved at beregne $10^{\log(3)}$. Lommeregnerens svar er $10^{0.47712} = 2.999991333$ ~ 3, så den fundne løsning $x = \log(3) \sim 0.47712$ er altså korrekt.

Opgave 7

Løs ligningen $\log(x) = 2.4$

Vi følger eksemplet herover: $\log(x) = 2.4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^{2.4} = 251.1886 \sim 251.19$

Vi kan gøre prøve ved at beregne log(251.1886). Lommeregnerens svar er 2.399999925~2.40, så den fundne løsning $x = 251.19$ er altså korrekt.

Opgave 8

Løs selv følgende ligninger:

a)	$\log(x) = -1.7$	d)	$10^x = 0.13$
b)	$\log(x) = 5$	e)	$10^x = 4711$
c)	$\log(x) = 14$	f)	$10^x = 3\cdot 10^6$